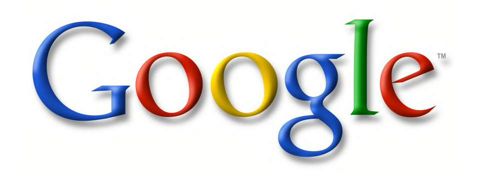
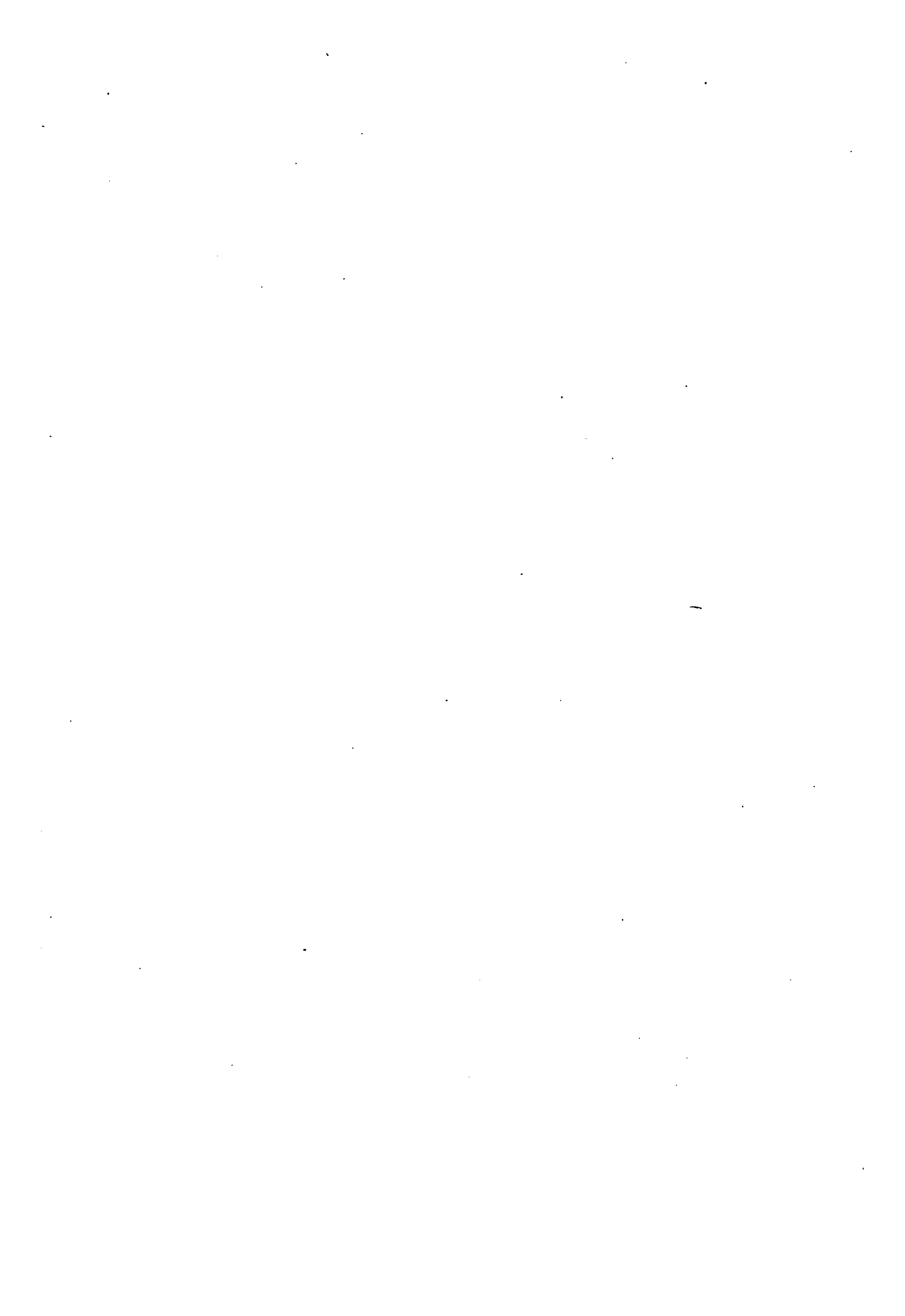



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDINAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



Anwendungen einer vielfach komplexen Grösse auf die Zahlentheorie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt

von

Carl Johann von Vieth.

Dresden,

Druck von B. G. Teubner.

1893.

Inhaltsverzeichnis.

I.

Die Eulersche Identität.

Euler (Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 1. Buch, 15. Kap., § 278) stellt die identische Gleichung auf:

$$M = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots}$$

oder:

$$M = \sum n^{-s} = \prod \frac{1}{1-p^{-s}},$$

wo links n alle ganze Zahlen von 1 bis ∞, rechts p alle Primzahlen von 2 an durchläuft. Der Konvergenz wegen muss der reelle Teil von $s > 1$ sein; da aber im übrigen s veränderlich ist, so liegt in dieser Gleichung ausgesprochen, dass nicht nur die Gesamtwerte links und rechts gleich sind, sondern auch je 2 entsprechende Glieder, wenn man die rechte Seite in Reihen entwickelt.

Dieses mathematische Gebilde M stellt also nicht nur eine mathematische einfache Grösse, nämlich die Summe aller $\frac{1}{n^s}$ dar, sondern auch, wenn man an die Veränderlichkeit von s denkt, eine Gesamtheit aller einzelnen $\frac{1}{n^s}$, also eine unendlich vielfach komplexe Grösse. M ist ferner erweiterungsfähig auf beliebige andere Funktionen der ganzen Zahlen und es enthält in der Produktform ausdrücklich nur die Primzahlen. Dadurch ist dieses Gebilde geeignet, diejenigen Sätze über Teilbarkeit der Zahlen und ähnliche Dinge zu beweisen, welche sich nicht aus der Betrachtung der einzelnen Zahlen, sondern aus der Betrachtung der Zahlen in ihrer Gesamtheit ergeben.

Unter anderen haben Dirichlet, Lipschitz, Liouville und Riemann viele solche Sätze veröffentlicht, teils ohne Angabe der Beweise, aber wohl meist mit Hilfe der Eulerschen Identität.

Da jetzt vielfach komplexe Grössen ausdrücklich als mathematische Begriffe anerkannt sind, so brachte mich das Bestreben, das Problem der Primzahlfrequenz mir anschaulich klar zu machen,

auf einen komplexen Grössenbegriff N, der schliesslich nichts weiter war, als eine andere Form für das Eulersche M. Während aber in N die qualitative Verschiedenheit der einzelnen Glieder von vornherein angenommen wird, wird derselbe Zweck in M, dem damaligen Standpunkte der Wissenschaft entsprechend, durch ein analytisches, dem Wesen der Sache fremdartiges Mittel erreicht. Daher halte ich den Begriff N für ein wenig geeigneter, um die oben erwähnten Sätze zu beweisen und sich anschaulich klar zu machen. Vergeblich waren bisher meine Versuche, den komplexen Begriff N noch so zu erweitern, dass dadurch die zahlreichen von Liouville im 3. Band der 2. Serie seines Journals aufgestellten Formeln und die Theorie der quadratischen Formen dargestellt werden könnten, obwohl es mir hierbei nur auf einen glücklichen Griff anzukommen scheint.

II.

Die Grösse N.

In den beiden identischen Ausdrücken

$$M = \sum n^{-s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

hat der Exponent $-s$ erstens den Zweck, die Divergenz der Werte zu verhindern, zweitens den Zweck, die einzelnen Glieder auseinander zu halten, so dass sowohl in dieser Gleichung, wie in allen anderen daraus abgeleiteten, rechts und links nicht nur die Gesamtwerte, sondern auch die einzelnen entsprechenden Teile gleich sind. Dieser Exponent ist also das analytische Mittel, durch welches M die Bedeutung einer komplexen Zahl erhält, ohne eine solche zu sein.

Nach Einführung der allgemeinen komplexen Zahlen in die Mathematik stellen wir nun also eine wirkliche komplexe Zahl N auf, welche aus unendlich vielen Einheiten $e_1, e_2, e_3, e_4 \ldots$ besteht, zwischen denen nur die eine Beziehung gilt:

$$e_a e_b = e_{ab}, \text{ also } e_a^2 = e_{a^2},$$

während natürlich eine Summe zweier verschiedener Einheiten nicht existiert.

Da hiernach speziell $e_1 . e_a = e_a$, so ist e_1 als Faktor indifferent und wir können keinen Fehler begehen, wenn wir statt e_1 die gewöhnliche reelle Einheit 1 setzen.

Als Koeffizienten der verschiedenen Einheiten e_n wählen wir nun beliebige Funktionen $f(n)$ der Indices, so dass jede einzelne Grösse N durch die Beschaffenheit der Funktion f vollständig charakterisiert ist. Wir schreiben also:

$$N(f) = f(1) + f(2)e_2 + f(3) \,.\, e_3 + f(4) \,.\, e_4 + \cdots$$

und wir wollen dies künftig so ausdrücken, dass $N(f)$ die Gesamtheit aller f, oder einfach die Funktion f selbst darstellt.

Demnach stellt

$$N(n) = 1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + \cdots$$

die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, oder einfach die Zahlen dar.

$$N(n^a) = 1 + 2^a e_2 + 3^a e_3 + 4^a e_4 + \cdots$$

stellt die a^{ten} Potenzen der Zahlen dar.

$N(1) = 1 + e_2 + e_3 + e_4 + \cdots$, also die Gesamtheit der verschiedenen Einheiten, ist ebenfalls einer der am häufigsten gebrauchten besonderen Fälle des komplexen Zahlenbegriffs $N(f)$.

Im allgemeinen lässt sich $N(f)$ nicht in Form eines Produkts bringen. Wir beschränken uns aber im ganzen folgenden auf die sogenannten zerfällbaren Funktionen, für welche die Gleichung

$$f(ab) = f(a) \,.\, f(b)$$

wenigstens für die Fälle gilt, wo a und b relative Primzahlen sind.

Dann haben wir also:

$$N(f) = \sum f(n) e_n = \prod [f(1) + f(p)e_p + f(p^2)e_p^2 + \cdots]$$

oder etwas einfacher geschrieben:

$$N(f) = \prod [f(1) + f(p)e + f(p^2)e^2 + \cdots],$$

wobei wir nur zu merken haben, dass e die Werte e_2, e_3, $e_5 \ldots$ annimmt, während p entsprechend die Werte 2, 3, 5... erhält.

Wir werden nun im folgenden verschiedene zerfällbare zahlentheoretische Funktionen $f(n)$ in ihrer Gesamtheit für alle ganzzahligen Werte von n durch das entsprechende $N(f)$ darzustellen versuchen, um auf diese Weise die bereits bekannten Sätze abzuleiten.

III.

Die Funktionen n^a und $\varphi(n)$.

Die Potenzfunktion n^a wird dargestellt durch

$$N(n^a) = 1 + 2^a e_2 + 3^a e_3 + 4^a e_4 + \cdots$$

oder wegen der Zerfällbarkeit:

1) $$N(n^a) = \prod (1 + p^a e + p^{2a} e^2 + \cdots) = \prod \frac{1}{1 - p^a e}.$$

Besondere Fälle davon sind:

2) $$N(n) = \prod \frac{1}{1 - pe},$$

was die Zahlen selbst darstellt, und

3) $$N(1) = \prod \frac{1}{1 - e},$$

was nur die Gesamtheit aller verschiedenen Einheiten darstellt.

In diesen Formeln treten nun auch bereits Quotienten auf. Wenn wir aber an der gewöhnlichen Definition des Quotienten festhalten als der Grösse, die mit dem Divisor multipliziert den Dividenden giebt, so ist die Berechtigung und Richtigkeit dieser Quotienten ausser Zweifel. Dazu kommt noch, dass bei unserer komplexen Grösse N hier und im folgenden von einer Divergenz nicht die Rede sein kann, sodass wir befreit sind von solchen Beschränkungen, die der Natur der in der Zahlentheorie behandelten Probleme nicht entsprechen.

Hieran schliesst sich die bekannte Funktion $\varphi(n)$, welche die Anzahl derjenigen Zahlen von 1 bis $n - 1$ angiebt, die zu n relativ prim sind. Wir werden zeigen, dass diese Funktion dargestellt wird durch:

4) $$N(\varphi) = \prod \frac{1 - e}{1 - pe} = \frac{N(n)}{N(1)}.$$

Zum Beweis entlehne ich die bekannte Formel

$$\sum \varphi(t) = n,$$

wo t alle Teile von n, 1 und n selbst eingeschlossen, bedeutet. Damit diese Formel ausnahmslos gelte, muss man $\varphi(1) = 1$ setzen. Diese Formel ist nun enthalten in folgender Gleichung, wo $N(\varphi) = \varphi(1) + \varphi(2)e_2 + \varphi(3)e_3 + \varphi(4)e_4 + \cdots$:

$$N(\varphi) \,.\, N(1) = N(n).$$

Wenn man nämlich bedenkt, dass $N(1)$ nur die Gesamtheit aller Einheiten darstellt, und wenn man die beiden Grössen links ausmultipliziert, so erhält man soviel Glieder mit e_n, wie die Zahl der Teiler von n beträgt, und die Koeffizienten sind die entsprechenden Werte von φ. Rechts dagegen erscheint n als Koeffizient von e_n, so dass durch Gleichsetzung entsprechender Koeffizienten die Formel

$$\sum \varphi(t) = n$$

erhalten wird. In obiger Gleichung sind also je 2 entsprechende Glieder gleich, also ist die ganze Gleichung und mithin auch die Formel 4) richtig. Wir können 4) als Definition der Funktion φ ansehen.

Wenn wir nun ganz einfache Beziehungen zwischen den komplexen Grössen (2), (3) und (4) aufstellen und beiderseits die Summen der Koeffizienten der n ersten Einheiten bilden, erhalten wir einige Formeln von Dirichlet und Lipschitz. Im wesentlichen wird das wohl derselbe Gedankengang sein, der zur Auffindung oder zu den früheren Beweisen dieser Formeln geführt hat. Ich beabsichtige nun, diesen Gedankengang mit Hilfe der komplexen Grössen N auch schriftlich rein zum Ausdruck zu bringen, während man mit Hilfe der früheren beschränkteren mathematischen Symbole das in der Zahlentheorie im Geiste klar Erkannte nur schwer schriftlich darstellen konnte. Die erste Dirichletsche Formel ergiebt sich aus der Betrachtung der Identität:

a) $$N(1)^2 = N(1)^2,$$

indem man sich die Bedeutung von $N(1)$ als Gesamtheit aller Einheiten $1, e_1, e_2 \ldots$ vergegenwärtigt und die Koeffizientensumme der n ersten Einheiten links und rechts auf verschiedene Weise bildet.

Wenn man links fertig ausmultipliziert, erhält man jedes e_n so oft, wie die Zahl der Teiler von n, einschliesslich 1 und n selbst, beträgt. Also ist der Koeffizient von e_n die Zahl der Teiler von n und die Summe der n ersten Koeffizienten die Summe $F(n)$ der Anzahlen der Teiler der n ersten Zahlen.

Rechts dagegen multiplizieren wir nur nach den Gliedern des einen Faktors aus und erhalten so:

$$1 . N(1) + e_2 . N(1) + e_3 N(1) + \cdots$$

Wenn wir uns nun klar machen, wie oft in jedem dieser Glieder eine der n ersten Einheiten vorkommt, so erhalten wir die Koeffizientensumme:

$$n + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n-1}\right) + 1,$$

wo die Klammer bedeutet, dass nur der ganzzahlige Teil des darin enthaltenen Wertes gemeint ist. Durch Gleichsetzung erhalten wir die erste Dirichletsche Formel:

$$F(n) = n + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right) + \cdots + 1.$$

An diesem einfachen und bekannten Beispiel sollte nur ein oft wiederholter Gedankengang gezeigt werden. Die zweite Dirichletsche Formel folgt aus der Gleichung

b) $$N(n) \,.\, N(1) = N(n) \,.\, N(1).$$

Links multiplizieren wir wieder völlig aus und erhalten als Koeffizient von e_n die Summe der Teiler von n, im ganzen also $G(n)$, die Summe der Teilersummen der n ersten Zahlen. Rechts dagegen multiplizieren wir nach den Gliedern des ersten Faktors aus und erhalten:

$$1 \,.\, N(1) + 2e_2 N(1) + 3e_3 N(1) + \cdots$$

woraus sich als Koeffizientensumme die rechte Seite der zweiten Dirichletschen Formel ergiebt:

$$G(n) = n + 2\left(\frac{n}{2}\right) + 3\left(\frac{n}{3}\right) + \cdots + n.$$

Hieran schliesst sich am natürlichsten die Gleichung:

$$N(n)^2 = N(n)^2.$$

Aus dieser ergiebt sich durch ganz dieselbe Behandlung:

$$H(n) = D(n) + 2D\left(\frac{n}{2}\right) + 3D\left(\frac{n}{3}\right) + \cdots + n,$$

wo $H(n)$ die Summe der n ersten Zahlen bedeutet, aber jede so oft genommen, wie die Zahl ihrer Teiler beträgt, während $D(x)$ die x^{te} Dreieckszahl, also $x(x+1):2$ bedeutet.

Die dritte Dirichletsche Formel ergiebt sich ebenso aus der Gleichung:

c) $$N(n) = N(1) \cdot \frac{N(n)}{N(1)} = N(1) \,.\, N(\varphi).$$

Links ist die Summe der n ersten Koeffizienten die Dreieckszahl $D(n)$. Rechts ergiebt sich durch Ausmultiplikation nach den Gliedern des ersten Faktors:

$$1 N(\varphi) + e_2 N(\varphi) + e_3 N(\varphi) + \cdots$$

Beim weiteren Ausmultiplizieren erhält man als Koeffizientensumme der n ersten Einheiten aus dem ersten Glied die Summe aller φ von $\varphi(1)$ bis $\varphi(n)$, welche Summe wir mit $\Phi(n)$ bezeichnen, aus dem zweiten Gliede erhält man die Summe der φ

nur bis $\varphi\left(\frac{n}{2}\right)$, also $\Phi\left(\frac{n}{2}\right)$ u. s. w. Damit ist auch die dritte Dirichletsche Formel neu bewiesen:

$$D(n) = \Phi(n) + \Phi\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + \Phi(1).$$

Ähnlich beweisen wir einige von Lipschitz (Comptes rendus Band 89, S. 948 flg.) abgeleitete Formeln. Wir gehen aus von der Gleichung:

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{N(1)} \cdot N(1) = 1.$$

Nach 3) giebt es für $N(1)$ auch die Produktform $\prod \frac{1}{1-e}$, wo der Index von e nur die Primzahlen von 2 an durchläuft, demnach ist:

$$\frac{1}{N(1)} = \prod (1-e) = 1 - e_2 - e_3 - e_5 + e_6 \mp \cdots,$$

wo nur die durch kein Quadrat teilbaren Zahlen auftreten und das Vorzeichen + oder — ist, je nachdem die Zahl der Primfaktoren gerade oder ungerade ist.

Ausführlich geschrieben lautet also unsere Gleichung:

$$(1 - e_2 - e_3 \mp \cdots)(1 + e_2 + e_3 + e_4 + \cdots) = 1,$$

und wenn man nun wieder nach den Gliedern des ersten Faktors ausmultipliziert und in jedem der Teilprodukte die Koeffizienten der n ersten Einheiten addiert, so erhält man die Formel von Lipschitz:

$$\left(\frac{n}{1}\right) - \left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{3}\right) - \left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{n}{6}\right) \mp \cdots = 1.$$

Hier liegt es nahe, die Gleichung:

$$\frac{1}{N(n)} \cdot N(n) = 1$$

oder ausführlich:

$$(1 - 2e_2 - 3e_3 - 5e_5 \pm \cdots)(1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + \cdots) = 1$$

ebenso zu behandeln.

Es ergiebt sich die Formel:

$$D(n) - 2D\left(\frac{n}{2}\right) - 3D\left(\frac{n}{3}\right) - 5D\left(\frac{n}{5}\right) \pm \cdots = 1.$$

Unter II) bringt Lipschitz drei auf den drei Dirichletschen Formeln fussende Formeln.

Wir leiten sie mit Hilfe der folgenden drei Gleichungen ab:

IIa) $$\frac{1}{N(1)} (N1)^2 = N(1).$$

Wie wir bei der Behandlung der ersten Dirichletschen Formel unter a) gesehen haben, ist die Summe der Koeffizienten der n ersten Einheiten in dem Produkte $N(1)^2$ die Funktion $F(n)$.

Wenn wir nun hier nach den Gliedern des ersten Faktors $\frac{1}{N(1)} = 1 - e_2 - e_3 \mp \cdots$ ausmultiplizieren und dann beim weiteren Ausmultiplizieren der Teilprodukte die Koeffizienten der n ersten Einheiten suchen, so erhalten wir:

$$F(n) - F\left(\frac{n}{2}\right) - F\left(\frac{n}{3}\right) \mp \cdots = n,$$

wie Lipschitz.

Die zweite Gleichung ist:

IIb) $$\frac{1}{N(n)} \cdot N(n) \,.\, N(1) = N(1).$$

Nach obiger Behandlung der zweiten Dirichletschen Formel unter b) ist die Koeffizientensumme des Produktes $N(n) \,.\, N(1)$ die Summe $G(n)$ der Teilersummen. Nach den Gliedern des ersten Faktors

$$\frac{1}{N(n)} = \prod (1 - pe) = 1 - 2e_2 - 3e_3 \mp \cdots$$

ausmultipliziert, ergiebt sich:

$$G(n) - 2G\left(\frac{n}{2}\right) - 3G\left(\frac{n}{3}\right) \mp \cdots = n.$$

Die dritte Gleichung ist:

IIc) $$\frac{1}{N(1)} \cdot N(n) = N(\varphi),$$

welche unmittelbar aus unserer Definition von φ folgt, deren Berechtigung nachgewiesen worden ist.

Als Gleichung zwischen den Koeffizientensummen ergiebt sich die dritte der von Lipschitz unter II) aufgestellten Formeln:

$$D(n) - D\left(\frac{n}{2}\right) - D\left(\frac{n}{3}\right) \mp \cdots = \Phi(n).$$

Ähnlich der Gleichung IIa) ist die Gleichung:

$$\frac{1}{N(n)} \cdot N(n)^2 = N(n),$$

aus welcher sich ergiebt:

$$H(n) - 2H\left(\frac{n}{2}\right) - 3H\left(\frac{n}{3}\right) \mp \cdots = D(n),$$

indem in dem Produkte $N(n)^2$, wie auch schon nachgewiesen, die Koeffizientensumme $= H(n)$ ist, d. h. gleich der Summe der n ersten Zahlen, jede so oft genommen, wie die Zahl der Teiler beträgt.

Endlich ist der Gleichung IIb) folgende Gleichung ähnlich:

$$\frac{1}{N(1)} \cdot N(n) \,.\, N(1) = N(n),$$

aus welcher die Formel folgt:

$$G(n) - G\left(\frac{n}{2}\right) - G\left(\frac{n}{3}\right) \mp \cdots = D(n).$$

Später hat Lipschitz (Comptes rendus, Band 96, S. 327 flg.) noch allgemeinere Formeln aufgestellt, indem er alle Primzahlen ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge in zwei beliebige Abteilungen $a, b, c \ldots$ und $p, q, r \ldots$ teilt.

Demnach zerfällt der Produktausdruck für $N(1)$ in zwei Produkte:

$$N(1) = N'(1) \,.\, N''(1),$$

wo $N'(1) = \prod \frac{1}{1 - e_a}$ nur die Primzahlen der ersten Abteilung, dagegen $N''(1) = \prod \frac{1}{1 - e_p}$ nur die der zweiten enthält.

$\frac{1}{N'(1)}$ ist folglich

$$= \prod (1 - e_a) = 1 - \sum e_a + \sum e_{ab} - \sum e_{abc} \pm \cdots,$$

wo z. B. ab alle Kombinationen der Primzahlen der ersten Abteilung ohne Wiederholung der zweiten Klasse durchläuft.

Wenn man demnach in der bekannten Weise die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{1}{N'(1)} \cdot N(1) = N''(1)$$

nach den Gliedern des ersten Faktors ausmultipliziert und dann die Koeffizientensumme sucht, so erhält man

$$n - \sum \left(\frac{n}{a}\right) + \sum \left(\frac{n}{ab}\right) \mp \cdots = 1 + \text{der Anzahl aller}$$

nur aus den Primzahlen $p, q, r \ldots$ zusammengesetzten Zahlen von 2 bis n.

Rechnet man alle Primzahlen zur ersten Abteilung, so erhält man die oben unter I) erwähnte Formel als besonderen Fall, rechnet man hingegen zur ersten Abteilung alle Primzahlen von 2 bis $\sqrt{n}$, so ist die linke Seite unserer Formel als Funktion dieser Primzahlen und der Zahl n berechenbar, rechts dagegen steht $1 +$ der Anzahl aller Primzahlen zwischen $\sqrt{n}$ und n, da alle Potenzen und Produkte dieser Primzahlen grösser als n sind und also nicht in Betracht kommen.

Diese Formel hat Legendre (Théorie des nombres, 2. édition, IV. partie) für die Anzahl der Primzahlen bis zur Grenze n aufgestellt, wenn die Primzahlen bis zur Grenze $\sqrt{n}$ alle einzeln bekannt sind.

Hier liegt es nahe, die Gleichung zu untersuchen:

$$\frac{1}{N'(n)} \cdot N(n) = N''(n),$$

indem man auch $N(n) = \prod \frac{1}{1-pe}$ in zwei Produkte $N'(n)$ und $N''(n)$ zerfällen kann.

Da

$$\frac{1}{N'(n)} = \prod (1 - ae_a) = 1 - \sum ae_a + \sum abe_{ab} \mp \cdots$$

und

$$N(n) = 1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + \cdots,$$

so ergiebt sich als Gleichung zwischen den Koeffizientensummen $D(n) - \sum a \,.\, D\left(\frac{n}{a}\right) + \sum ab \,.\, D\left(\frac{n}{ab}\right) \mp \cdots = 1 +$ der Summe aller Zahlen von 2 bis n, die nur aus den Primfaktoren der zweiten Abteilung zusammengesetzt sind.

Wenn man hier wieder zur ersten Abteilung alle Primzahlen von 2 bis $\sqrt{n}$ rechnet, so erhält man eine Formel für die Summe der Primzahlen bis zur Grenze n, wenn die Primzahlen bis $\sqrt{n}$ einzeln bekannt sind.

In demselben Aufsatz stellt Lipschitz noch drei Formeln auf, welche seine eigenen früheren Formeln und die von Dirichlet als besondere Fälle enthalten.

Wir gehen zum Beweise derselben von den folgenden drei Gleichungen aus:

$$\frac{1}{N'(1)} \cdot N(1)^2 \qquad = N''(1) \,.\, N(1),$$

$$\frac{1}{N'(n)} \cdot N(n) \,.\, N(1) = N''(n) \,.\, N(1),$$

$$\frac{1}{N'(1)} \cdot N(n) \qquad = N''(1) \,.\, N(\varphi).$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen folgt aus den Beziehungen $N'(1) \,.\, N''(1) = N(1)$, $N'(n) \,.\, N''(n) = N(n)$ und $N(\varphi) = \frac{N(n)}{N(1)}$.

Rechnet man alle Primzahlen zur zweiten Abteilung, so erhält man die drei Formeln a), b), c), welche auf die Formeln von Dirichlet führten, rechnet man aber alle Primzahlen zur ersten Abteilung, so erhält man die Formeln IIa), IIb) und IIc) und somit die früheren Formeln von Lipschitz.

Wir behandeln nun diese allgemeinsten Gleichungen wieder in derselben Weise, indem wir beiderseits nach den Gliedern des ersten Faktors ausmultiplizieren und die Koeffizientensummen der n ersten Einheiten in allen Teilprodukten bilden, wobei wir den Buchstaben P als Repräsentanten aller aus den Primfaktoren $p, q \ldots$ zusammengesetzten Zahlen bis zur Grenze n benutzen:

$$F(n) - \sum F\left(\frac{n}{a}\right) + \sum F\left(\frac{n}{a}\right) \pm \cdots \quad = n + \sum \left(\frac{n}{P}\right),$$

$$G(n) - \sum a G\left(\frac{n}{a}\right) + \sum ab G\left(\frac{n}{ab}\right) \pm \cdots = n + \sum P \,.\, \left(\frac{n}{P}\right),$$

$$D(n) - \sum D\left(\frac{n}{a}\right) + \sum D\left(\frac{n}{ab}\right) \pm \cdots \quad = \Phi(n) + \sum \Phi\left(\frac{n}{P}\right).$$

Dies sind die von Lipschitz gegebenen Gleichungen. Hier liegt es nahe, auch folgende zwei Gleichungen dieser Behandlung zu unterwerfen:

$$\frac{1}{N'(1)} \cdot N(n) N(1) = N''(1) \,.\, N(n),$$

$$\frac{1}{N'(n)} \cdot N(n)^2 \qquad = N''(n) \,.\, N(n),$$

Aus der ersten folgt:

$$G(n) - \sum G\left(\frac{n}{a}\right) + \sum G\left(\frac{n}{ab}\right) \mp \cdots = D(n) + \sum D\left(\frac{n}{P}\right),$$

aus der zweiten:

$$H(n) - \sum a H\left(\frac{n}{a}\right) + \sum ab H\left(\frac{n}{ab}\right) \mp \cdots = Dn + \sum P \,.\, D\left(\frac{n}{P}\right).$$

IV.

Die Funktionen $\lambda(n)$ und $\theta(n)$.

In diesem und einigen folgenden Abschnitten sollen nun hauptsächlich die von Liouville in seinem Journal (2. Serie, 2. Band) ohne Beweis aufgestellten Formeln bewiesen werden.

In diesen Formeln kommt ausser n^a und $\varphi(n)$ sehr oft die Funktion $\lambda(n)$ vor, welche die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem n eine gerade oder ungerade Anzahl von Primfaktoren hat. $\lambda(1)$ soll $= +1$ sein, was unserer bisherigen Festsetzung auch entspricht, wonach die Zahl 1 gar keinen Primfaktor enthält, denn dann ergiebt die obige Definition von $\lambda(n)$ den Wert $+1$, wenn man, wie gewöhnlich, 0 als gerade Zahl ansieht.

Ferner ist

$$\lambda(2) = -1,$$
$$\lambda(3) = -1,$$
$$\lambda(4) = +1$$
etc.,

so dass die Gesamtheit der einzelnen Fälle durch folgende komplexe Grösse dargestellt wird:

$$N(\lambda) = 1 - e_2 - e_3 + e_4 - e_5 + e_6 - e_7 - e_8 \pm \cdots$$

Diese Reihe ist aber das Resultat der Berechnung des folgenden Produkts:

$$\prod (1 - e + e^2 - e^3 + \cdots) = \prod \frac{1}{1+e},$$

wo e alle primzahligen Einheiten $e_2, e_3, e_5 \ldots$ zu durchlaufen hat.

Wir erhalten somit in

$$N(\lambda) = \prod \frac{1}{1+e}$$

diejenige komplexe Grösse, welche als Koeffizienten irgend einer Einheit e_n den zugehörigen Wert $\lambda(n)$ enthält, oder welche die Funktion λ darstellt.

Eine zweite bei Liouville ziemlich häufig vorkommende Funktion ist $\theta(n)$, welche die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei relativ prime Faktoren bedeutet, wobei 1 als zu allen Zahlen relativ prim anzusehen ist, da es gar keinen Primfaktor hat, also auch mit keiner Zahl einen solchen gemeinsam haben kann. Ferner werden die Zerlegungen $n = a \cdot b$ und $n = b \cdot a$ als zwei verschiedene gerechnet.

Sei $n = p^\alpha . q^\beta . r^\gamma \ldots$, so ergiebt die Ausmultiplikation des Produktes:

$$(1+p^\alpha)(1+q^\beta)(1+r^\gamma)\ldots$$

alle die Faktoren von n, die zu ihren komplementären Faktoren relativ prim sind. Dieses Produkt ergiebt aber 2^ν Glieder, wenn ν die Anzahl der verschiedenen in n vorkommenden Primzahlen ist, also ist:

$$\theta(n) = 2^\nu.$$

Diese Funktion wird dargestellt durch die folgende komplexe Grösse:

$$N(\theta) = \prod(1 + 2e + 2e^2 + 2e^3 + \cdots),$$

wo e alle primzahligen Einheiten von e_2 an durchläuft, denn beim Ausmultiplizieren dieses Produktes erhält man offenbar als Koeffizient von e_n die Zahl 2^ν, wenn ν die Zahl der verschiedenen in n enthaltenen Primfaktoren bedeutet, also ist der Koeffizient von e_n in der That $= \theta(n)$.

Obiger Ausdruck ist aber weiter $= \prod \frac{1+e}{1-e}$, wie eine Reihenentwickelung dieses Ausdrucks sofort lehrt, und dies ist wieder durch die schon bekannten komplexen Grössen

$$N(1) = \prod \frac{1}{1-e} \quad \text{und} \quad N(\lambda) = \prod \frac{1}{1+e}$$

ausdrückbar.

Wir haben somit $\theta(n)$ dargestellt durch die Grösse:

$$N(\theta) = \prod \frac{1+e}{1-e} = \frac{N(1)}{N(\lambda)}. \tag{6}$$

Endlich kommt noch die Potenz dieser Funktion vor. $\theta^\mu(n)$ wird offenbar dargestellt durch die komplexe Grösse:

$$\left\{\begin{aligned} N(\theta^\mu) &= \prod(1 + 2^\mu e + 2^\mu e^2 + 2^\mu e^3 + \cdots), \\ &= \prod[2^\mu(1 + e + e^2 + e^3 + \cdots) - (2^\mu - 1)], \\ &= \prod\left[\frac{2^\mu}{1-e} - (2^\mu - 1)\right] = \prod \frac{2^\mu - 2^\mu + 1 + (2^\mu - 1)e}{1-e} = \prod \frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Da diese komplexen Grössen in der Produktform ziemlich einfach gestaltet sind, so lassen sich leicht Beziehungen zwischen ihnen und neuen Grössen aufstellen. In den so gefundenen Gleichungen haben wir früher die Summen der Koeffizienten der n ersten Einheiten aufgesucht und gleichgesetzt, während wir jetzt nur die Koeffizienten einer einzigen Einheit e_n beiderseits

aufsuchen und einander gleichsetzen werden. Auf diese Weise werden wir alle Formeln beweisen, die Liouville im 2. Band der 2. Serie seines Journals (Artikel I bis IV) veröffentlicht und nur hin und wieder mit Andeutungen von Beweisen versehen hat.

Nach 5) ist:

$$N(\lambda) \,.\, N(1) = \prod \frac{1}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-e^2}.$$

Wenn wir nun den Koeffizienten von e_{12} z. B. links aufsuchen, so müssen wir uns die Bedeutung der Symbole vergegenwärtigen:

$$N(\lambda) = \lambda(1) + \lambda(2)e_2 + \lambda(3)e_3 + \cdots$$
$$N(1) = 1 + e_2 + e_3 + \cdots$$

Wir erhalten beim Ausmultiplizieren e_{12} so oft, wie die Zahl der Teiler von 12 beträgt, der Koeffizient ist für jeden Teiler d das zugehörige $\lambda(d)$. Wir erhalten

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \lambda(4) + \lambda(6) + \lambda(12) = \sum \lambda(d)$$

als Koeffizienten von e_{12}.

Rechts kommt bei der Reihenentwickelung von $\prod \frac{1}{1-e^2}$ e_{12} gar nicht vor, sondern es kommen nur die Einheiten mit quadratischem Index vor und zwar mit dem Koeffizienten 1.

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n links und rechts ergiebt sich also:

$$\sum \lambda(d) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ ein Quadrat,} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ kein Quadrat.} \end{cases} \qquad \text{S. 246.}$$

Aus 5) und 6) folgt ferner:

$$N(\lambda) \,.\, N(\theta) = N(1).$$

Links erscheinen als Koeffizienten von e_n alle Werte $\lambda(d)$, jeder multipliziert mit $\theta(\delta)$, wenn δ den zu d komplementären Teiler von n bedeutet. Rechts ist der Koeffizient von $e_n = 1$, also:

$$\sum \lambda(d) \,.\, \theta(\delta) = 1. \qquad \text{S. 247.}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich natürlich noch viele Beziehungen aufstellen, die bei Liouville nicht angegeben sind. Da es mir mehr auf die Methode, als auf die Erfindung neuer Beziehungen ankommt, so will ich nur das folgende anführen:

Aus 4) ergiebt sich, dass:

$$\prod (1 - pe) \,.\, N(\varphi) = \prod (1 - e).$$

Die rechte Seite $(1 - e_2)(1 - e_3)(1 - e_5) \ldots$ enthält nur die Einheiten, deren Indices durch kein Quadrat teilbar sind, be-

haftet mit dem Koeffizienten $+1$ oder -1, je nachdem die Zahl der Primfaktoren gerade oder ungerade ist. Der erste Faktor links ist ähnlich gebildet und hat nur ausserdem noch Koeffizienten, die den Indices gleich sind.

Sucht man nun die Koeffizienten irgend eines e_n links und rechts auf und setzt sie gleich, so ergiebt sich die folgende Beziehung:

Die algebraische Summe derjenigen Teiler von n, welche durch kein Quadrat teilbar sind und deren Vorzeichen nach obiger Regel bestimmt sind, jedes Glied multipliziert mit der φ Funktion des komplementären Teilers, ergiebt den Wert 0, wenn n ein Quadrat enthält, sonst dagegen ± 1, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl Faktoren hat.

V.

Die Zahl der Teiler und ähnliche Funktionen.

Wenn man das Produkt $N(1) . N(1) = N(1)^2$ der sich nun immer wiederholenden Betrachtungsweise unterzieht, dass man sich jeden Faktor ausführlich hingeschrieben und dann das Produkt ausmultipliziert denkt, so sieht man, dass der Koeffizient von e_n die Zahl der Teiler von n ist, welche Funktion mit $\zeta(n)$ bezeichnet wird und wobei 1 und n als Teiler zu betrachten sind.

Also wird die Gesamtheit aller ζ dargestellt durch:

$$8)\qquad N(\zeta) = \prod \frac{1}{(1-e)^2} = N(1)^2.$$

Ebenso wird die Summe $\zeta_1(n)$ der Teiler von n dargestellt durch:

$$9)\qquad N(\zeta_1) = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = N(n) . N(1),$$

und die Summe der a^{ten} Potenzen der Teiler durch:

$$10)\qquad N(\zeta_a) = N(n^a) . N(1) = \prod \frac{1}{1-p^a e} \cdot \prod \frac{1}{1-e}.$$

Ferner wird einige Male die Funktion $\zeta(n^2)$ von n vorkommen, welche also für einen gegebenen Wert von n die Zahl der Teiler von n^2 angeben soll.

In der entsprechenden komplexen Grösse muss also als Koeffizient von e_n die Zahl der Teiler von n^2 auftreten; wir erhalten diese Grösse, indem wir in dem Ausdruck 8) jedes e_n^2 mit

quadratischem Index durch e_n ersetzen und alle Glieder mit nicht quadratischen Einheiten weglassen.

Dies erreichen wir aber mit einem Schlage dadurch, dass wir in dem Produktausdruck jede Einheit e_p durch eine neue Einheit ersetzen, die so beschaffen sein muss, dass ihr Quadrat $= e_p$ ist und die wir also am besten mit $\sqrt{e_p}$ bezeichnen.

Aus 8) wird also $\prod \frac{1}{(1-\sqrt{e_p})^2}$. Man überzeugt sich leicht, dass der Koeffizient von e_n bei der Berechnung dieses Produkts derselbe wird, den in dem Ausdruck 8) selbst die Einheit e_n^2 erhielt, also stellt das neue Produkt die Funktion $\zeta(n^2)$ dar.

Für die neuen Einheiten $\sqrt{e_p}$ gilt die Beziehung $\sqrt{e_p}\,.\,\sqrt{e_p} = e_p$, also erhält man durch Erweitern des Bruches mit $(1+\sqrt{e_p})^2$:

$$N[\zeta(n^2)] = \prod \frac{(1+\sqrt{e})^2}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+e+2\sqrt{e}}{(1-e)^2}.$$

Da bei der Ausführung des Produkts das letzte Glied des Zählers nur solche Einheiten neuer Art liefert, deren Koeffizienten ohne Interesse sind, da wir nur verlangen, dass der Koeffizient von $e_n = \zeta(n^2)$ sein soll, so lassen wir diesen Teil einfach weg und erhalten:

$$\text{11)} \qquad N[\zeta(n^2)] = \prod \frac{(1+e)}{(1-e)^2} = \frac{N(1)^2}{N(\lambda)}.$$

Entsprechend erhalten wir für die Funktion $\zeta(n^\mu)$, welche für einen gegebenen Wert von n die Zahl der Teiler von n^μ angiebt, durch Einführung der Einheiten $\sqrt[\mu]{e}$ die komplexe Grösse:

$$N[\zeta(n^\mu)] = \prod \frac{1}{(1-\sqrt[\mu]{e})^2},$$

wo man dem Sinne der Sache gemäss mit $\sqrt[\mu]{e}$ gerade so rechnet, wie mit e selbst, nur dass das Wurzelzeichen andeuten soll, dass die μ^{te} Potenz dieser neuen Einheit $= e$ sein soll, während alle Potenzen, deren Exponenten durch μ nicht teilbar sind, in dem ausgerechneten Ausdruck wegzulassen sind.

Durch Erweitern ergiebt sich:

$$N[\zeta(n^\mu)] = \prod \frac{(1+\sqrt[\mu]{e}+\sqrt[\mu]{e^2}+\cdots+\sqrt[\mu]{e^{\mu-1}})^2}{(1-e)^2}.$$

Beim Ausmultiplizieren des Zählers erhält man ausser den wegzulassenden Teilen nur 1 und ausserdem $(\mu-1)$mal die Einheit e, also wird:

12) $$N[\zeta(n^\mu)] = \prod \frac{1+(\mu-1)e}{(1-e)^2}.$$

Wir werden nun wieder Gleichungen zwischen den bis jetzt vorgekommenen komplexen Grössen aufstellen, welche durch Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten von e_n zahlentheoretische Formeln von Liouville liefern:

Es ist, nur durch Vertauschung der Faktorenfolge verschieden:

$$\prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^\nu e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^\nu e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-e}.$$

Links steht nach 1) und 10) $N(n^\mu) \,.\, N(\zeta_\nu)$, rechts $N(n^\nu) \,.\, N(\zeta_\mu)$. Beim Ausmultiplizieren erhält man also als Koeffizienten von e_n:

$$\sum d^\mu \,.\, \zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu \,.\, \zeta_\mu(\delta), \qquad \text{S. 428.}$$

wo sich die Summe über alle Teiler d von n, 1 und n eingeschlossen, erstreckt, während δ jedesmal den komplementären Teiler $\frac{n}{d}$ bedeutet.

Ferner ist:

$$\prod \frac{1}{1-e} \cdot \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2}.$$

Hieraus folgt in derselben Weise nach 8) und 9):

$$\sum \zeta_1(d) = \sum \delta \,.\, \zeta(d). \qquad \text{S. 142.}$$

(Bei Liouville steht $\int$ statt ζ_1.)

Eine andere Identität ist:

$$\prod \frac{1-e}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e},$$

aus welcher nach 4), 8) und 9) folgt:

$$\sum \varphi(d) \,.\, \zeta(\delta) = \zeta_1(n). \qquad \text{S. 143.}$$

Die Identität

$$\prod \frac{1}{1-e} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e} = \prod \frac{1+e}{(1-e)^2}$$

ergiebt nach 6) und 11):

$$\sum \theta(d) = \zeta(n^2). \qquad \text{S. 184.}$$

Die Identität

$$\prod\frac{1+e}{(1-e)^2}\cdot\prod\frac{1-e}{1-pe}=\prod\frac{1}{1-pe}\cdot\prod\frac{1+e}{1-e}$$

giebt nach 11), 4) und 6):

$$\sum\zeta(\delta^2)\,.\,\varphi(d)=\sum\delta\,.\,\theta(d). \qquad \text{S. 378.}$$

Aus

$$\prod\frac{1+e}{(1-e)^2}\cdot\prod\frac{1}{1+e}=\prod\frac{1}{(1-e)^2}$$

folgt nach 11), 5 und 8):

$$\sum\zeta(d^2)\,.\,\lambda(\delta)=\zeta(n). \qquad \text{S. 379.}$$

Aus

$$\prod\frac{1+e}{1-e}\cdot\prod\frac{1}{1-p^\mu e}\cdot\frac{1}{1-e}=\prod\frac{1}{1-p^\mu e}\cdot\prod\frac{1+e}{(1-e)^2}$$

folgt nach 6), 10) und 11:

$$\sum\theta(d)\,.\,\zeta_\mu(\delta)=\sum d^\mu\zeta(\delta^2). \qquad \text{S. 428.}$$

Aus

$$\prod\frac{1}{1-e}\cdot\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e}=\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e^2}$$

folgt nach 7) und 12), wenn man in 12) μ durch 2^μ ersetzt:

$$\sum\theta(d)^\mu=\zeta(n^{2\mu}). \qquad \text{S. 383.}$$

Aus

$$\prod\frac{1+(2^\nu-1)e}{1-e}\cdot\prod\frac{1}{1-p^\mu e}\cdot\frac{1}{1-e}=\prod\frac{1}{1-p^\mu e}\cdot\prod\frac{1+(2^\nu-1)e}{(1-e)^2}$$

folgt nach 7), 10) und 12):

$$\sum\theta(d)^\nu\,.\,\zeta_\mu(\delta)=\sum d^\mu\,.\,\zeta(\delta^{2\nu}). \qquad \text{S. 430.}$$

Aus

$$\prod\frac{1-e}{1-pe}\cdot\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{(1-e)^2}=\prod\frac{1}{1-pe}\cdot\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e}$$

folgt nach 4), 12) und 7):

$$\sum\varphi(d)\,.\,\zeta(\delta^{2\mu})=\sum d\theta(\delta)^\mu. \qquad \text{S. 383.}$$

Endlich folgt aus

$$\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{(1-e)^2}\cdot\prod\frac{1+e}{1-e}=\prod\frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e}\cdot\prod\frac{1+e}{(1-e)^2}$$

nach 12), 6), 7) und 11) die Formel:

$$\sum\zeta(d^{2\mu})\,.\,\theta(\delta)=\sum\theta(d)^\mu\,.\,\zeta(\delta^2). \qquad \text{S. 384.}$$

Eine besondere Gruppe von Formeln ergiebt sich, wenn die komplexe Grösse:

$$\prod \frac{1}{1-e^2} = 1 + e_4 + e_9 + e_{16} + \cdots,$$

welche nur die quadratischen Einheiten enthält, mit irgend einer anderen komplexen Grösse

$$N(f) = f(1) + f(2)e_2 + f(3)e_3 + \cdots$$

multipliziert wird. Als Koeffizient von e_n erscheint dann im ausgeführten Produkt nur die Summe derjenigen Werte $f(d)$, für welche der komplementäre Faktor δ eine Quadratzahl ist, welche Summe wir nach Liouville mit $\sum' f\left(\frac{n}{D^2}\right)$ bezeichnen, wo D^2 alle quadratischen Teiler von n durchläuft.

So ergiebt sich z. B. aus der Identität

$$\prod \frac{1}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2}$$

nach 5) und 9) die folgende Formel:

$$\sum \lambda(d) \,.\, \zeta_1(\delta) = \sum' \frac{n}{D^2} = n \sum' \frac{1}{D^2}. \qquad \text{S. 248.}$$

Aus

$$\prod \frac{1+e}{1-e} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2} = \prod \frac{1}{(1-e)^2}$$

folgt nach 6) und 8):

$$\sum' \theta\left(\frac{n}{D^2}\right) = \zeta(n). \qquad \text{S. 184.}$$

Aus

$$\prod \frac{1+(2^\mu - 1)e}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1}{1+e} = \prod \frac{1+(2^\mu - 1)e}{1-e} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2}$$

folgt nach 12), 5) und 7):

$$\sum \zeta(d^{2\mu}) \,.\, \lambda(\delta) = \sum' \theta\left(\frac{n}{D^2}\right)^\mu. \qquad \text{S. 384.}$$

Aus

$$\prod \frac{1}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2}$$

folgt nach 5) und 10):

$$\sum \lambda(d) \,.\, \zeta_\mu(\delta) = \sum' \left(\frac{n}{D^2}\right)^\mu. \qquad \text{S. 430.}$$

Wir haben in den letzten Formeln den Faktor $\prod \frac{1}{1-e^2}$ verwendet, den man sich dadurch auch entstanden denken kann,

dass man in $N(1) = \prod \frac{1}{1-e}$ jedes e durch e^2 ersetzt. Wir können nun auch in jeder anderen komplexen Grösse N jedes e_p durch e_p^2 ersetzen und erhalten dann beim Ausmultiplizieren dieselben Koeffizienten wie ursprünglich, nur ist das zugehörige e_n durch e_n^2 ersetzt:

$$f(1) + f(2)e_4 + f(3)e_9 + f(4)e_{16} + \cdots$$

Zum Beispiel in der Identität

$$\prod \frac{1-e^2}{1-pe^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1}{1-pe^2} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e}$$

ist der erste Faktor links nach 4) auf diese Weise aus $N(\varphi)$ entstanden, der zweite Faktor ist nach 8) $= N(\zeta)$, also ist der Koeffizient irgend einer Einheit e_n die linke Seite der folgenden Formel:

$$\sum{}' \varphi(D) \cdot \zeta\left(\frac{n}{D^2}\right) = \sum{}' D \cdot \theta\left(\frac{n}{D^2}\right). \qquad \text{S. 380.}$$

Die rechte Seite entsteht aus der rechten Seite obiger Identität, indem man bedenkt, dass der erste Faktor $\prod \frac{1}{1-pe^2}$ aus $N(n) = \prod \frac{1}{1-pe}$ entsteht, wenn man e durch e^2 ersetzt, während der zweite Faktor nach 6) $= N(\theta)$ ist.

In der Identität

$$\prod \frac{1+e^2}{1-e^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e}$$

sind die ersten Faktoren links und rechts durch die entsprechende Modifikation nach 6) und 11) aus $N(\theta)$ und $N[\zeta(n^2)]$ hervorgegangen, während die zweiten Faktoren mit den Grössen 8) und 6) übereinstimmen. Also ergiebt sich:

$$\sum{}' \theta(D) \cdot \zeta\left(\frac{n}{D^2}\right) = \sum{}' \zeta(D^2) \cdot \theta\left(\frac{n}{D^2}\right). \qquad \text{S. 381.}$$

Endlich ist in der Identität

$$\prod \frac{1}{1+e^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1}{1-e^4} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e}$$

der erste Faktor links der auf obige Weise modifizierte Ausdruck für $N(\lambda)$, der zweite dagegen nach 8) $= N(\zeta)$, wodurch die linke Seite der folgenden Formel erklärt wird.

Der erste Faktor rechts $\prod \frac{1}{1-e^4}$ stellt die Gesamtheit der vierten Potenzen aller Einheiten dar:

$$1 + e_{16} + e_{81} + e_{256} + \cdots,$$

also können von dem zweiten Faktor, der nach 6) $= N(\theta)$ ist, nur diejenigen Glieder sich an der Bildung des Koeffizienten von e_n beteiligen, deren komplementärer Teiler eine vierte Potenz ist. Also ergiebt sich durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n:

$$\sum{}' \lambda(D) \cdot \zeta\left(\frac{n}{D^2}\right) = \sum{}'' \theta\left(\frac{n}{D^4}\right) \qquad \text{S. 383.}$$

wo rechts D^4 diejenigen Teiler von n durchläuft, welche vierte Potenzen sind.

VI.

Produkte von Funktionen.

Unter dem Produkt zweier Funktionen f und φ verstehe ich das Produkt derselben für dasselbe Argument, also $f(n) \cdot \varphi(n)$, d. h. also wieder eine Funktion von n, während in den bisherigen Formeln solche Produkte $f(d) \cdot \varphi(\delta)$ vorkamen, deren Argumente komplementäre Teiler von n waren. Eine Produktfunktion kann man natürlich auch durch eine komplexe Grösse N darstellen, welche als Koeffizienten jeder Einheit e_n das zugehörige $f(n)\varphi(n)$ enthält.

Seien nun $f(n)$ und $\varphi(n)$ einzeln dargestellt durch

$$N(f) = f(1) + f(2)e_2 + f(3)e_3 + \cdots$$

und

$$N(\varphi) = \varphi(1) + \varphi(2)e_2 + f(3)e_3 + \cdots,$$

so ist diejenige Grösse, welche $f \cdot \varphi$ darstellt, also:

$$N(f\varphi) = f(1) \cdot \varphi(1) + f(2) \cdot \varphi(2)e_2 + f(3) \cdot \varphi(3)e_3 + \cdots,$$

keineswegs das Produkt der zwei ersteren Grössen, sondern man müsste, um $N(f \cdot \varphi)$ durch Multiplikation von $N(f)$ und $N(\varphi)$ zu erhalten, nur die Glieder mit gleichen Einheiten e_n multiplizieren und dann jedes e_n^2 durch e_n ersetzen. Diese Operation könnte man nach Grassmann allenfalls als eine innere Multiplikation bezeichnen.

Es ist nun klar, dass $N(1) = \prod \frac{1}{1-e}$, welches die Gesamtheit aller Einheiten darstellt, bei innerer Multiplikation mit einer anderen Grösse $N(f)$ wieder genau dasselbe $N(f)$ ergiebt; bei dieser Operation spielt also $N(1)$ dieselbe indifferente Rolle, wie in der gewöhnlichen Arithmetik die einfache reelle Einheit.

Wenn dagegen die Grösse

$$N(n^x) = 1 + 2^x e_2 + 3^x e_3 + \cdots$$

als innerer Faktor von $N(f)$ auftritt, so erhält jedes e_n ausser $f(n)$ noch den Faktor n^x.

Wenn wir also z. B. $N(n^x)$ mit $N(\zeta_y) = \prod \frac{1}{1-p^y e} \cdot \frac{1}{1-e}$ innerlich multiplizieren, so erhalten wir:

$$13)\ N(n^x . \zeta_y) = \prod \frac{1}{1-p^{x+y} e} \cdot \frac{1}{1-p^x e} = N(n^{x+y}) . N(n^x),$$

so dass dieses innere Produkt durch ein gewöhnliches Produkt ersetzt werden kann.

Setzt man $x = b$ und $y = a - b$ und vertauscht die Seiten, so erhält man:

$$14)\quad N(n^a) N(n^b) = \prod \frac{1}{1-p^a e} \cdot \frac{1}{1-p^b e} = N(n^b . \zeta_{a-b}),$$

in welcher Form wir unser Resultat im folgenden bequemer werden verwenden können.

Als besonderer Fall ist die schon bekannte Formel 10) anzusehen:

$$N(n^a) . N(1) = N(\zeta_a).$$

Da nach 14):

$$\prod \frac{1}{1-p^2 e} \cdot \frac{1}{1-pe} = N(n . \zeta_1),$$

so folgt aus der Identität

$$\prod \frac{1}{1-p^2 e} \cdot \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^2 e} \cdot \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e}$$

mit Hilfe von 9) die Formel:

$$\sum d . \zeta_1(d) = \sum d^2 \zeta_1(\delta). \qquad \text{S. 142.}$$

(Bei Liouville steht $\int$ statt ζ_1.)

Da ferner nach 14):

$$\prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-pe} = N(n . \zeta),$$

weil wir ζ_0, die Summe der 0ten Potenzen der Teiler, d. h. die Zahl der Teiler, mit ζ bezeichnen, so folgt aus der Identität

$$\left(\prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e}\right)^2 = \prod \frac{1}{(1-pe)^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2}$$

mit Hilfe von 9) und 8) die Formel:

$$\sum \zeta_1(d)\zeta_1(\delta) = \sum d\zeta(d)\zeta(\delta). \qquad \text{S. 143.}$$

Ebenso folgt mit Hilfe von 9) und 14) aus

$$\prod \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{(1-pe)^2} \cdot \prod \frac{1}{1-e}$$

die Formel:

$$\sum d \,.\, \zeta_1(\delta) = \sum d \,.\, \zeta(d). \qquad \text{S. 245.}$$

Aus:

$$\prod \frac{1-e}{1-pe} \cdot \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{(1-pe)^2}$$

folgt, mit Hilfe derselben Formeln und der Formel 4):

$$\sum \varphi(d)\zeta_1(\delta) = n\zeta(n). \qquad \text{S. 245.}$$

Da ferner nach 14)

$$\prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-pe} = N(n \,.\, \zeta_{\mu-1}),$$

so folgt aus

$$\prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-e} \cdot \prod \frac{1-e}{1-pe} = \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-pe}$$

nach 10) und 4) die Formel:

$$\sum \zeta_\mu(d) \,.\, \varphi(\delta) = n\zeta_{\mu-1}(n). \qquad \text{S. 427.}$$

Da nach 14)

$$\prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-p^\mu e} = N(n^\mu \,.\, \zeta),$$

so folgt aus der Identität

$$\prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{(1-p^\mu e)^2} \cdot \prod \frac{1}{1-e}$$

nach 10) die Formel, deren spezieller Fall schon oben steht:

$$\sum d^\mu \zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu \zeta(d). \qquad \text{S. 428.}$$

Da nach 14)

$$\prod \frac{1}{1-p^{2\mu} e} \cdot \frac{1}{1-p^\mu e} = N(n^\mu \,.\, \zeta_\mu),$$

so folgt aus

$$\prod \frac{1}{1-p^{2\mu}e} \cdot \frac{1}{1-p^{\mu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^{2\mu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^{\mu}e} \cdot \frac{1}{1-e}$$

mit Hilfe von 10) die Formel:

$$\sum d\zeta_\mu(d) = \sum d^{2\mu}\zeta_\mu(\delta). \qquad \text{S. 429.}$$

Ebenso folgt aus der Identität

$$\prod \frac{1}{1-p^{\mu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^{3\mu}e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^{3\mu}e} \cdot \frac{1}{1-p^{\mu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-e}$$

mit Hilfe von 10) und 14):

$$\sum d^{\mu}\zeta_{3\mu}(\delta) = \sum d^{\mu}\zeta_{2\mu}(d). \qquad \text{S. 429.}$$

Endlich folgt aus

$$\left\{ \begin{aligned} &\prod \frac{1}{1-p^{\mu+\tau}e} \cdot \frac{1}{1-p^{\mu+\nu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^{\nu}e} \cdot \frac{1}{1-e} \\ &= \prod \frac{1}{1-p^{\nu+\mu}e} \cdot \frac{1}{1-p^{\nu}e} \cdot \prod \frac{1}{1-p^{\tau+\mu}e} \cdot \frac{1}{1-e} \end{aligned} \right.$$

mit Hilfe von 14) und 10):

$$\sum d^{\mu+\nu} \cdot \zeta_{\tau-\nu}(d) \cdot \zeta_\nu(\delta) = \sum d^{\nu}\zeta_\mu(d) \cdot \zeta_{\tau+\mu}(\delta). \qquad \text{S. 429.}$$

VII.

$N(\lambda)$ als innerer Faktor.

Wir haben im vorigen Abschnitte verschiedene komplexe Grössen $N(f)$ mit $N(n^a)$ innerlich multipliziert, d. h. nur die Glieder gleicher Einheit multipliziert und dann die Einheit e^2 durch e ersetzt. Im besonderen ergab die Multiplikation mit $N(n^0) = N(1)$ keine Veränderung des anderen Faktors.

$N(\lambda) = \prod \frac{1}{1+e}$ stellt auch die Gesamtheit aller Einheiten dar, jedoch mit dem Koeffizienten $+1$ oder -1, je nachdem die Zahl der Primfaktoren des Index gerade oder ungerade ist.

Wenn nun also irgend ein $N(f)$ mit $N(\lambda)$ innerlich multipliziert wird, so ändern sich in $N(f)$ nur die Vorzeichen derjenigen Glieder, deren Index eine ungerade Zahl von Primfaktoren enthält.

Da wir nun für alle vorkommenden Grössen $N(f)$ Produktausdrücke haben, in denen ausdrücklich nur solche Einheiten e stehen, deren Indices Primzahlen sind, während alle anderen Ein-

heiten durch Ausmultiplikation erhalten werden, so erreiche ich alle obigen Vorzeichenänderungen einfach dadurch, dass ich in dem Produktausdruck für $N(f)$ das Vorzeichen jeder Einheit e ändere. Bei innerer Multiplikation spielt also der Faktor $N(\lambda)$ gewissermassen dieselbe Rolle, wie in der gewöhnlichen Arithmetik die negative Einheit. Wenn ich z. B. $N(\lambda) = \prod \frac{1}{1+e}$ mit sich selbst innerlich multipliziere, so erhalte ich:

$$15) \qquad N(\lambda \,.\, \lambda) = \prod \frac{1}{1-e} = N(1).$$

Wenn ich $N(\lambda)$ mit $N(n) = \prod \frac{1}{1-pe}$ innerlich multipliziere, so ergiebt sich:

$$16) \qquad N(\lambda \,.\, n) = \prod \frac{1}{1+pe}.$$

Da

$$N(\zeta) = \prod \frac{1}{(1-e)^2},$$

so ist:

$$17) \qquad N(\lambda \,.\, \zeta) = \prod \frac{1}{(1+e)^2} = N(\lambda)^2.$$

Da

$$N(\zeta_1) = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e},$$

so ist:

$$18) \qquad N(\lambda \,.\, \zeta_1) = \prod \frac{1}{1+pe} \cdot \frac{1}{1+e}.$$

Da

$$N(\theta) = \prod \frac{1+e}{1-e},$$

so ist:

$$19) \qquad N(\lambda \,.\, \theta) = \prod \frac{1-e}{1+e} = \frac{1}{N(\theta)} = \frac{N(\lambda)}{N(1)}.$$

Da endlich

$$N[\zeta(n^2)] = \prod \frac{1+e}{(1-e)^2},$$

so ist:

$$20) \qquad N[\lambda \,.\, \zeta(n^2)] = \prod \frac{1-e}{(1+e)^2} = \frac{N(\lambda)^2}{N(1)}.$$

Hierauf beruhen wieder einige Formeln von Liouville.

Aus der Identität:

$$\prod \frac{1-e}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1+e}$$

folgt nach 19) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n:

$$\sum \lambda(d) \,.\, \theta(d) = \lambda(n). \qquad \text{S. 247.}$$

Aus

$$\prod \frac{1-e}{1+e} \cdot \prod \frac{1+e}{(1-e)^2} = \prod \frac{1}{1-e}$$

folgt nach 19) und 11):

$$\sum \lambda(d) \cdot \theta(d) \cdot \zeta(\delta^2) = 1. \qquad \text{S. 247.}$$

Aus

$$\prod \frac{1-e}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1}{1-e^2}$$

folgt nach 19) und 8):

$$\sum \lambda(d) \cdot \theta(d) \cdot \zeta(\delta) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } n \text{ eine Quadratzahl ist,} \\ 0, \text{ wenn } n \text{ kein Quadrat ist.} \end{cases} \qquad \text{S. 246.}$$

Aus

$$\prod \frac{1-e}{1+e} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e} = 1$$

folgt nach 19) und 6) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n:

$$\sum \lambda(d) \cdot \theta(d) \cdot \theta(\delta) = 0, \text{ ausser für } n = 1. \qquad \text{S. 247.}$$

Aus

$$\prod \frac{1-e}{(1+e)^2} \cdot \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^\mu e} \cdot \prod \frac{1}{(1+e)^2}$$

folgt nach 20), 10) und 17):

$$\sum \lambda(d) \cdot \zeta(d^2) \cdot \zeta_\mu(\delta) = \sum d^\mu \cdot \lambda(\delta) \cdot \zeta(\delta). \qquad \text{S. 427.}$$

Endlich folgt aus

$$\prod \frac{1}{1+pe} \cdot \frac{1}{1+e} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1+pe} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2}$$

nach 18) und 16):

$$\sum \lambda(d) \cdot \zeta_1(d) = \sum{}' \lambda\left(\frac{n}{D^2}\right) \cdot \frac{n}{D^2},$$

da rechts nur diejenigen Glieder von $\prod \frac{1}{1+pe}$ sich an der Bildung des Koeffizienten von e_n beteiligen können, deren Index $\frac{n}{D^2}$ einen komplementären Teiler hat, der ein Quadrat ist.

Da nun nach der ursprünglichen Definition $\lambda(n)$ nichts anderes als die Grösse $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Zahl der Primfaktoren von n gerade oder ungerade ist, so muss $\lambda\left(\frac{n}{D^2}\right)$ stets mit $\lambda(n)$ übereinstimmen und wir können also in obiger Formel rechts ausser n auch $\lambda(n)$ als gemeinsamen Faktor herausheben, so dass wir erhalten:

$$\sum \lambda(d) \cdot \zeta_1(d) = n \cdot \lambda(n) \cdot \sum{}' \frac{1}{D^2}. \qquad \text{S. 382.}$$

VIII.

$N(\zeta)$ als innerer Faktor.

Wenn man

$$N(\zeta) = \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod (1 + 2e_p + 3e_p^2 + 4e_p^3 + \cdots)$$

mit einer anderen Grösse innerlich multiplizieren will, die ebenfalls in ein Produkt zerfällbar ist:

$$N(f) = \prod [f(1) + f(p)e_p + f(p^2)e_p^2 + \cdots],$$

so braucht man nur je zwei entsprechende Faktoren innerlich zu multiplizieren und erhält so:

$$N(\zeta \,.\, f) = \prod [f(1) + 2f(p)e_p + 3f(p^2)e_p^2 + \cdots].$$

Wenn man nun einen Faktor dieser neuen Funktion mit dem entsprechenden Faktor von $N(f)$ vergleicht, so fällt die äussere Ähnlichkeit mit der Differentiationsformel einer Potenzenreihe auf.

In der That, wenn man einen Faktor von $N(f)$ mit e_p multipliziert, dann e_p als unabhängig variabel ansieht und den Differentialquotienten bildet, so erhält man gerade einen Faktor von $N(\zeta \,.\, f)$.

Ebenso gut kann ich einen Faktor von $N(\zeta \,.\, f)$ in zwei Teile zerlegen:

$$[f(1) + f(p)e_p + f(p^2)e_p^2 + \cdots] + [f(p) + 2f(p^2)e_p + 3f(p^3)e_p^2 + \cdots]\, e_p.$$

Derselbe ist also gleich dem entsprechenden Faktor von $N(f)$, vermehrt um den Differentialquotienten desselben in Bezug auf e_p, letzteren noch mit e_p multipliziert.

Durch diese formelle Übereinstimmung mit bekannten Operationen können wir also irgend eine in ein Produkt zerfällbare Grösse $N(f)$ leicht mit $N(\zeta)$ innerlich multiplizieren, um $N(\zeta \,.\, f)$ zu erhalten.

Aus $N(\lambda) = \prod \frac{1}{1+e}$ folgt z. B. auf diese Art:

$$N(\zeta \,.\, \lambda) = \prod \left(\frac{1}{1+e} - \frac{e}{(1+e)^2}\right) = \prod \frac{1}{(1+e)^2},$$

was wir unter 17) noch einfacher gefunden haben, da der andere Faktor $N(\lambda)$ ist.

Wenn man $N(\zeta)$ mit sich selbst, d. h. mit $\prod \frac{1}{(1-e)^2}$, innerlich multipliziert, so erhält man:

$$21)\quad N(\zeta^2) = \prod \left(\frac{1}{(1-e)^2} + 2 \frac{e}{(1-e)^3} \right) = \prod \frac{1+e}{(1-e)^3}.$$

Multipliziert man dies wieder mit $N(\zeta)$ innerlich, so ergiebt sich:

$$N(\zeta^3) = \prod \left[\frac{1+e}{(1-e)^3} + e \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{1+e}{(1-e)^3} \right) \right] = \prod \frac{1+4e+e^2}{(1-e)^4}.$$

Ferner:

$$N(\zeta^4) = \prod \frac{1+11e+11e^2+e^3}{(1-e)^5}$$

u. s. w.

Ferner folgt aus 12)

$$N[\zeta(n^\mu)] = \prod \frac{1+(\mu-1)e}{(1-e)^2}$$

die Formel:

$$22)\quad \begin{cases} N[\zeta(n) \, . \, \zeta(n^\mu)] = \prod \left[\frac{1+(\mu-1)e}{(1-e)^2} + e \, . \, \frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{1+(\mu-1)e}{(1-e)^2} \right) \right] \\ = \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3}. \end{cases}$$

Auf 21) beruhen die folgenden drei Formeln von Liouville:

Aus

$$\prod \frac{1+e}{1-e} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+e}{(1-e)^3}$$

folgt nach 6), 8) und 21):

$$\sum \theta(d) \, . \, \zeta(\delta) = \zeta(n)^2. \qquad \text{S. 143.}$$

Aus

$$\prod \frac{1+e}{(1-e)^3} \prod \frac{1-e}{1+e} = \prod \frac{1}{(1-e)^2}$$

folgt nach 21), 19) und 8):

$$\sum \zeta(d)^2 \, . \, \lambda(\delta) \, . \, \theta(\delta) = \zeta(n). \qquad \text{S. 378.}$$

Aus

$$\prod \frac{1}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+e}{(1-e)^3} \cdot \prod \frac{1}{1-e^2}$$

folgt nach 8) und 21):

$$\sum \zeta(d) \, . \, \zeta(\delta) = \sum{}' \zeta\left(\frac{n}{D^2}\right)^2, \qquad \text{S. 144.}$$

denn wegen des Faktors $\prod \frac{1}{1-e^2}$ kommen, wie früher, nur die Argumente von $\zeta(x)^2$ in Betracht, deren komplementäre Teiler Quadrate sind.

Auf 22) beruhen noch neun von Liouville aufgestellte Formeln:

Aus
$$\prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3}$$
folgt nach 12) und 22):
$$\sum \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(n) \,.\, \zeta(n^\mu). \qquad \text{S. 244.}$$
Aus
$$\prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3} \prod \frac{1}{1-e}$$
folgt nach 12), 8) und 22):
$$\sum \zeta(d^{2\mu}) \,.\, \zeta(\delta) = \sum \zeta(d) \,.\, \zeta(d^\mu). \qquad \text{S. 244.}$$
Aus
$$\prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2} \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3}$$
folgt nach 12), 9) und 22):
$$\sum \zeta(d^{2\mu}) \,.\, \zeta_1(\delta) = \sum d \,.\, \zeta(\delta) \,.\, \zeta(\delta^\mu). \qquad \text{S. 380.}$$
Aus
$$\prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2} \prod \frac{1}{1-p^\nu e} \cdot \frac{1}{1-e} = \prod \frac{1}{1-p^\nu e} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3}$$
folgt nach 12), 10) und 22) die erweiterte Formel:
$$\sum \zeta(d^{2\mu}) \zeta_\nu(\delta) = \sum d^\nu \zeta(\delta) \,.\, \zeta(\delta^\mu). \qquad \text{S. 430.}$$
Aus
$$\prod \frac{1-e}{1-pe} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3} = \prod \frac{1}{1-pe} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2}$$
folgt nach 4), 22) und 12):
$$\sum \varphi(d) \,.\, \zeta(\delta) \,.\, \zeta(\delta^\mu) = \sum d \,.\, \zeta(\delta^{2\mu}). \qquad \text{S. 379.}$$
Aus
$$\prod \frac{1+e}{1-e} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3} = \prod \frac{1+e}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2}$$
folgt nach 6), 22), 11) und 12):
$$\sum \theta(d) \,.\, \zeta(\delta) \,.\, \zeta(\delta^\mu) = \sum \zeta(d^2) \,.\, \zeta(\delta^{2\mu}). \qquad \text{S. 380.}$$
Die Doppelformel
$$\prod \frac{1+(2^\mu-1)e}{1-e} \cdot \prod \frac{1}{(1-e)^2} = \prod \frac{1+(2^\mu-1)e}{(1-e)^2} \cdot \prod \frac{1}{1-e}$$
$$= \prod \frac{1+(2^\mu-1)e}{(1-e)^3}$$

liefert nach 7), 8), 12) und 22) durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n die Liouvillesche Doppelformel:

$$\sum \theta(d)^\mu \cdot \zeta(\delta) = \sum \zeta(d^{2\mu}) = \zeta(n) \cdot \zeta(n^{2\mu-1}). \qquad \text{S. 384.}$$

In der Identität

$$\prod \frac{1+(2\mu-1)e^2}{(1-e^2)^3} \cdot \prod \frac{1+e}{1-e} = \prod \frac{1+(2\mu-1)e^2}{(1-e^2)^2} \prod \frac{1}{(1-e)^2}$$

ist der zweite Faktor links nach 6) $= N(\theta)$, der erste links dagegen nach 22) $= N[\zeta(n) \cdot \zeta(n^\mu)]$, mit dem Unterschiede, dass e durch e^2 ersetzt ist, so dass nur die quadratischen Einheiten e_n^2 vorkommen, diese aber multipliziert mit dem Funktionswert für n selbst. Bei der Ausmultiplikation beteiligen sich also an der Bildung des Gliedes mit e_n von seiten des ersten Faktors nur quadratische Einheiten und wir erhalten die linke Seite der folgenden Formel:

$$\sum{}' \zeta(D) \zeta(D^\mu) \cdot \theta\left(\frac{n}{D^2}\right) = \sum{}' \zeta(D^{2\mu}) \cdot \zeta\left(\frac{n}{D^2}\right), \qquad \text{S. 382.}$$

deren rechte Seite ebenso nach 12) und 8) einzusehen ist.

Endlich folgt aus

$$\prod \frac{1}{1+e} \cdot \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^3} = \prod \frac{1+(2\mu-1)e}{(1-e)^2} \prod \frac{1}{1-e^2}$$

mit Hilfe von 5), 22) und 12) die Formel:

$$\sum \lambda(d) \cdot \zeta(\delta) \cdot \zeta(\delta^\mu) = \sum{}' \zeta\left(\frac{n^{2\mu}}{D^{4\mu}}\right). \qquad \text{S. 382.}$$

IX.

Differentiation der Grösse N.

Durch Anwendung verhältnismässig einfacher Rechenregeln auf komplexe Grössen haben wir zahlreiche Formeln der Zahlentheorie neu bewiesen. Die Frage liegt nun nahe, ob nicht auch die Differentiation der Grösse N zu Resultaten führen könne.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Einheiten e_p, deren Indices Primzahlen sind und die hier stets als von einander unabhängige jeder Grösse N zu Grunde liegende Elemente verwendet werden, als unabhängige Variabeln, und zwar vermehren wir jede solche Einheit e_p um dasselbe Vielfache $\Delta \cdot e_p$ derselben. Hierdurch werden also schliesslich nur die Koeffizienten verändert, die Einheiten selbst aber nicht modifiziert.

Irgend eine zusammengesetzte Einheit $e_{12} = e_2 e_2 e_3$ verwandelt sich dabei in

$$(e_2 + \Delta e_2)(e_2 + \Delta e_2)(e_3 + \Delta e_3) = e_{12} + 3\Delta \,.\, e_{12} +$$

solchen Grössen, die Δ^2 zum Faktor haben.

Der Zuwachs von e_{12}, dividiert durch Δ, ist demnach für ein unendlich abnehmendes $\Delta = 3e_{12}$, wo 3 die Anzahl der Primfaktoren von 12 oder die sogenannte Dimension von 12 ist.

Wenn e_{12} noch den Koeffizienten $f(12)$ hatte, so erhält man, da $f(12)$ ungeändert bleibt, $3f(12)e_{12}$ als Differentialquotienten, oder vielmehr richtiger als erste Variation.

Alle auf diese Weise gebildeten Differentialquotienten bezeichnen wir auf die gewöhnliche Weise durch einen oben angesetzten Strich.

Demnach ist:

$$N'(1) = e_2 + e_3 + 2e_4 + e_5 + 2e_6 + e_7 + 3e_8 + \cdots,$$

wo also als Koeffizient jeder Einheit die Dimension des Index auftritt, d. h. die Anzahl der Primfaktoren ohne Rücksicht darauf, ob sich gleiche darunter finden; die Dimension der Zahl 1 ist $= 0$. Wenn wir also die Dimension einer Zahl n mit $dim\,(n)$ bezeichnen, so ist diese zahlentheoretische Funktion dargestellt durch:

$$N(dim) = N'(1).$$

Der Differentialquotient irgend einer anderen komplexen Grösse, z. B. der die Anzahl der Teiler darstellenden Grösse $N(\zeta)$ ist:

$$N'(\zeta) = \zeta(2)e_2 + \zeta(3)e_3 + 2\zeta(4)e_4 + \cdots,$$

also ist der Koeffizient von e_n gleich der Zahl der Teiler von n, multipliziert mit der Dimension von n.

Da nun nach unserer früheren Formel 8) $N(\zeta) = N(1)^2$ ist und da die gewöhnliche Formel für die Differentiation eines Produktes offenbar auch hier gelten muss, so ist auch

$$N'(\zeta) = 2N(1)\,.\,N'(1).$$

Wir setzen nun die beiden Ausdrücke für $N'(\zeta)$ einander gleich:

$$\begin{cases} \zeta(2)e_2 + \zeta(3)e_3 + 2\zeta(4)e_4 + \cdots \\ = 2(1 + e_2 + e_3 + e_4 + \cdots)(e_2 + e_3 + 2e_4 + \cdots). \end{cases}$$

Rechts ergiebt sich beim Ausrechnen als Koeffizient von e_n die doppelte Summe der Dimensionen aller Teiler von n.

Durch Gleichstellung der Koeffizienten von e_n erhält man also den Satz:

„Die Anzahl der Teiler von n, multipliziert mit der Dimension von n, ist doppelt so gross als die Summe der Dimensionen aller Teiler von n.“

Dieser Satz ist hier abgeleitet worden für den Zahlbegriff n, der aus den von einander unabhängigen, weil unaddierbaren, Primzahlen zusammengesetzt ist; die vorhergehenden Betrachtungen und der darauf beruhende Satz lassen sich aber ausdehnen auf jeden Begriff, der formell ebenso aus Elementen zusammengesetzt ist, wie eine Zahl aus ihren Primfaktoren; d. h. wo die Reihenfolge (kommutatives Gesetz) und Gruppierung der Elemente (assoziatives Gesetz) bei ihrer Zusammensetzung zu einem Begriff gleichgiltig ist.

Unser obiger Satz bleibt jedenfalls bestehen, nur bedeutet das Wort Teiler in dieser allgemeineren Fassung jeden Begriff, dem 0, 1 oder mehrere oder alle Elemente des Begriffs n fehlen, sowie oben unter Teilern von n sowohl n selbst als auch alle Teiler von n einschliesslich der Einheit verstanden wurden. Das Wort Dimension eines Begriffs bedeutet die Anzahl der ihn zusammensetzenden Elemente.

Als Beispiel wollen wir, um im Gebiete der Grössenlehre zu bleiben, den anders aufgefassten Zahlbegriff n behandeln. Ursprünglich ist der Zahlbegriff entstanden durch Anhäufung eines einzigen Elements, der Einheit, wobei das kommutative und assoziative Gesetz gilt, also sind die Bedingungen erfüllt, unter denen obiger Satz gilt. Die Addition hat also in gewissem Grade formelle Übereinstimmung mit der Multiplikation, worauf ja die praktische Bedeutung der Logarithmen beruht.

Bei dem aus lauter Einheiten additiv zusammengesetzten Zahlbegriff n muss man als Teiler jede Zahl betrachten, der 0 bis n Elemente fehlen, d. h. jede Zahl von n bis 0 ist ein Teiler; die Dimension einer Zahl ist die Zahl ihrer Elemente, d. h. ihr Wert. In diesem Falle erhält also obiger allgemeiner Satz die folgende Form:

$$(n+1)n = 2(n + \cdots + 2 + 1 + 0),$$

und das ist die leicht direkt zu beweisende Formel für die n^{te} Dreieckszahl; die Summe der Dimensionen der Teiler ist als eine Verallgemeinerung der Dreieckszahl anzusehen.

Einen anderen Satz erhalten wir durch Differentiation des Produkts:

$$N(1)\,N(\lambda)=\prod\frac{1}{1-e}\prod\frac{1}{1+e}=\prod\frac{1}{1-e^2}=1+e_4+e_9+e_{16}+e_{25}+\cdots$$

In dieser Form erhält man als Differentialquotienten die Grösse $2e_4+2e_9+4e_{16}+2e_{25}+\cdots$

Andererseits erhält man $N(1)\,.\,N'(\lambda)+N(\lambda)\,.\,N'(1)$. Durch Gleichsetzung beider Werte ergiebt sich, ausführlich geschrieben:

$$\begin{cases} \quad (1+e_2+e_3+\cdots)(-e_2-e_3+2e_4-e_5+2e_6-\cdots) \\ +(1-e_2-e_3+e_4-e_5\pm\cdots)(e_2+e_3+2e_4+e_5+2e_6+\cdots) \\ =2e_4+2e_9+4e_{16}+2e_{25}+\cdots \end{cases}$$

Wir wollen auch hier die Koeffizienten von e_n auf beiden Seiten aufsuchen und zusehen, was sich durch ihre Gleichsetzung ergiebt: Rechts sind nur die Koeffizienten der quadratischen Einheiten von 0 verschieden; links erhalten wir durch Ausrechnen des ersten Produkts als Koeffizienten von e_n die algebraische Summe der Dimensionen aller Teiler von n, wobei das Vorzeichen der geradzahligen Dimensionen $+$, das übrige $-$ ist. Das zweite Produkt ergiebt eine algebraische Summe derselben Grössen, wobei sich aber das Vorzeichen nach der Dimension des komplementären Teilers richtet. Ist nun bei einer vorgelegten Zahl n die Dimension eine ungerade Zahl, so ist stets die Dimension eines Teilers gerade, wenn die des komplementären Teilers ungerade ist, und umgekehrt, so dass je zwei entsprechende Glieder der zwei Produkte gleichen absoluten Wert und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Als Koeffizienten von e_n erhalten wir also links selbstverständlich 0, ebenso wie rechts.

Eine wirkliche Formel erhalten wir nur, wenn wir eine Zahl n mit geradzahliger Dimension betrachten, denn dann sind je ein Teiler und sein komplementärer Teiler beide von gerader oder beide von ungerader Dimension und beide Produkte ergeben nach absolutem Wert und Vorzeichen genau dieselben Glieder als Koeffizienten von e_n.

Also ist der aus dem ersten Produkt entnommene Koeffizient gleich dem halben Koeffizienten von e_n in der Grösse:

$$2e_4+2e_9+4e_{16}+\cdots,$$

d. h. für gewöhnlich $=0$, für Quadratzahlen aber gleich der halben Dimension derselben, oder gleich der Dimension ihrer Wurzel.

Wenn wir links die positiven Glieder und die negativen unter sich zusammenfassen, so können wir unser Resultat folgendermassen aussprechen:

„Wenn die Dimension der Zahl n, d. h. die Zahl aller darin enthaltenen Primfaktoren, geradzahlig ist, so ist die Summe aller geradzahligen Dimensionen der Teiler von n gleich der Summe der ungeradzahligen, wenn n kein Quadrat ist. Ist dagegen n ein Quadrat, so ist die erste Summe um die Dimension von $\sqrt{n}$ grösser als die zweite."

Sind z. B. p, q und r drei beliebige Primzahlen, so ist die Zahl $n = p^5q^2r$ kein Quadrat, aber ihre Dimension $5 + 2 + 1 = 8$ ist geradzahlig, also ist die Summe der Dimensionen der folgenden Teiler:

$$p^5q^2r, \quad p^4q^2, \quad pq, \; p^4qr, \quad \ldots,$$

deren Dimensionen geradzahlig sind, gleich der Summe der Dimensionen der übrigen Teiler:

$$p, \quad p^2q, \quad q, \quad p^4r, \quad \ldots$$

Betrachte ich nur die in diesen Teilern vorkommenden Exponenten, so kann ich noch folgenden Satz hieraus ablesen, in welchem nur von Addition die Rede ist:

„Bilde ich alle möglichen Summen dreier Zahlen, wobei der erste Summand alle Werte von 0 bis 5, der zweite alle Werte von 0 bis 2, der dritte die Werte 0 und 1 annehmen kann, so ist die Summe der geraden Summen gleich der der ungeraden."

Dies gilt nur, wenn die oberen Grenzen 5, 2, 1 eine gerade Summe haben, aber einzeln nicht alle gerade Zahlen sind; sind sie alle einzeln geradzahlig, so tritt der Fall der Quadratzahl ein.

X.

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

Die komplexe Grösse $N(1) = 1 + e_2 + e_3 + e_4 + \cdots$ enthält in der Produktform $\prod \frac{1}{1 - e_p}$ ausdrücklich nur diejenigen Einheiten e_p, deren Indices Primzahlen sind. Wenn wir nun den natürlichen Logarithmus dieses Produktes nach den gewöhnlichen Regeln in Reihen entwickeln, so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} \log N(1) &= \sum \log \frac{1}{1-e_p} = -\sum \log (1-e_p) \\ &= \sum e_p + \sum \frac{1}{2} e_p^2 + \sum \frac{1}{3} e_p^3 + \cdots, \end{aligned}\right.$$

d. h. eine Grösse, die aus Einheiten besteht, deren Indices Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen sind, denn es ist $e_p^2 = e_{p^2}$, $e_p^3 = e_{p^3}$, ...; die Koeffizienten sind 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, je nachdem die Indices 1te, 2te, 3te... Potenzen von Primzahlen sind.

Bilde ich in dieser komplexen Grösse, die ich als naturgemässe Definition des Logarithmus von $N(1)$ anzusehen berechtigt bin, die Koeffizientensumme aller Einheiten, deren Indices eine beliebig gegebene Grösse n nicht überschreiten, so erhalte ich die Anzahl der Primzahlen bis zu dieser Grenze + der halben Anzahl der Primzahlquadrate bis zu dieser Grenze + dem dritten Teil der Primzahlkuben u. s. w., also die von Riemann mit $f(n)$ bezeichnete Funktion (Riemann, Gesammelte Werke S. 136: „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse").

$\log N(1)$ ist also ein alle Fälle umfassender Ausdruck für die Riemannsche Funktion $f(n)$, indem jedes $f(n)$ als Koeffizientensumme der n ersten Einheiten aus $\log N(1)$ abgeleitet werden kann.

Ehe wir weitere Untersuchungen über diese Funktion $f(n)$ und verwandte Funktionen anstellen, wollen wir geometrische Bilder für die komplexen Grössen $N(1)$, $N(1)^2$ und $N(1)^3$ herstellen, weil dadurch die folgenden Formeln anschaulichere Bedeutung gewinnen.

$N(1)$ als Gesamtheit der Einheiten kann repräsentiert werden durch äquidistante Punkte einer Geraden, so dass der Punkt, dessen Entfernung von einem beliebigen Anfangspunkt $= n$ Längeneinheiten ist, die Einheit e_n bedeutet.

Um $N(1)^2$ durch ein Punktsystem zu veranschaulichen, zeichne ich in einer Ebene einen rechten Winkel, trage auf beiden Schenkeln Punkte wie oben auf und ziehe durch dieselben Parallelen zu den Schenkeln. Ein Gitterpunkt mit den Koordinaten a und b bedeute die Einheit e_{ab}; dann kommt jede Einheit unter den Gitterpunkten ebenso oft vor, wie in $N(1)^2$, also ist $N(1)^2$ repräsentiert durch die Gesamtheit der innerhalb der Winkelschenkel liegenden Gitterpunkte, da die Punkte auf den Schenkeln selbst hierbei keine Bedeutung haben. Die Koeffizientensumme

von $N(1)^2$ bis zu einer Grenze e_n wird im geometrischen Bilde veranschaulicht durch die Anzahl der Gitterpunkte im Innern der Schenkel bis zu einer gewissen Grenzlinie, auf der das Produkt der Koordinaten $= n$ ist, d. h. bis zu dem einen Zweig der durch die Gleichung $xy = n$ charakterisierten Hyperbel.

Ganz ähnlich wird $N(1)^3$ veranschaulicht durch ein System von Gitterpunkten im Innern einer dreiseitigen körperlichen Ecke und die Koeffizientensumme bis zur Grenze e_n ist die Zahl der Gitterpunkte, die nicht jenseits der durch die Gleichung $xyz = n$ charakterisierten Fläche liegen.

Nun hört die geometrische Darstellbarkeit auf, doch gewinnen immerhin schon hierdurch die folgenden Formeln mehr anschaulichen Sinn; sie sind überhaupt ursprünglich mit Hilfe dieser geometrischen Anschauung teils bewiesen, teils erraten worden, so dass ich lieber diese Punktsysteme als Grundbegriffe und die komplexe Grösse N als eine für die schriftliche Darstellung geeignete Abstraktion daraus ansehen möchte.

Ich will noch vorausschicken, dass im folgenden nur $N(1) - 1$ und die Potenzen dieser Grösse vorkommen, d. h. dass die erste Einheit überall wegfällt; im geometrischen Bilde fallen dann einfach alle die Punkte weg, deren Koordinaten nicht alle > 1 sind. Z. B. ist die Koeffizientensumme von $(N - 1)^2$ bis zur Grenze e_n die Zahl der Gitterpunkte, welche nicht ausserhalb einer dreieckigen Fläche liegen, deren Grenzen zwei Parallellen zu den Winkelschenkeln im Abstand 2 und die Hyperbel $xy = n$ sind.

Nun gehen wir also zu weiteren Untersuchungen über die Funktion $\log N(1)$ und damit auch über $f(n)$ über. Da das Rechnen mit unseren komplexen Grössen sich vom Rechnen mit gewöhnlichen vielgliedrigen Ausdrücken nur dadurch unterscheidet, dass gewisse Operationen, nämlich die Addition und Subtraktion von Gliedern mit verschiedenen Einheiten, unausführbar sind, so müssen alle in der gewöhnlichen Arithmetik giltigen Rechenregeln und Umwandlungen auch hier gelten, soweit sie überhaupt ausführbar sind. Dazu kommt, dass wegen der Unaddierbarkeit der verschiedenen Einheiten bei den unendlichen Reihen von einer Divergenz nur dann die Rede sein könnte, wenn dasselbe e_n unendlich oft vorkäme, welcher Fall nicht eintreten wird.

Die oben nach den gewöhnlichen Regeln entwickelte Grösse $\log N$ muss also z. B. auch nach der Formel

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

entwickelt werden können.

Wir erhalten so:

$$\log(1+N-1) = (N-1) - \frac{(N-1)^2}{2} + \frac{(N-1)^3}{3} - \cdots,$$

also durch Gleichsetzung beider Entwickelungen:

$$\begin{cases} \log N = \sum e_p + \frac{1}{2}\sum e_p^2 + \frac{1}{3}\sum e_p^3 + \cdots \\ \quad = (N-1) - \frac{(N-1)^2}{2} + \frac{(N-1)^3}{3} - \cdots, \end{cases}$$

wo also die drei ersten Glieder der rechten Seiten durch Punktsysteme veranschaulicht sind.

Die Koeffizientensumme bis zur Grenze e_n, d. h. also die Funktion $f(n)$ oder die Anzahl der Primzahlen, vermehrt um die entsprechenden Bruchteile der Primzahlpotenzen, ist gleich der Zahl $n-1$, vermindert um die halbe Zahl der Gitterpunkte der oben genau bezeichneten dreieckigen Fläche, vermehrt um den dritten Teil der Gitterpunkte eines von drei Ebenen und der Fläche $xyz = n$ begrenzten Raumes u. s. w.

Multipliziere ich ferner

$$\log N = \sum e_p + \frac{1}{2}\sum e_p^2 + \frac{1}{3}\sum e_p^3 + \cdots$$

mit sich selbst, so erhalte ich:

$$\begin{cases} \log^2 N = \sum e_p^2 + \sum e_p^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)\sum e_p^4 + \cdots \\ \qquad + 2\sum e_p e_q + \sum e_p e_q^2 + \frac{2}{3}\sum e_p e_q^3 + \cdots, \end{cases}$$

wo p und q stets zwei verschiedene Primzahlen bedeuten. Andererseits folgt aus der zweiten Entwickelung von $\log N$, dass auch:

$$\log^2 N = (N-1)^2 - (N-1)^3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)(N-1)^4 - \cdots$$

Die Gleichsetzung der Koeffizientensummen beider Reihenentwickelungen ergiebt:

Die Zahl der Quadrate und Kuben von Primzahlen bis zur Grösse $n + \frac{11}{12}$ der Zahl der vierten Potenzen von Primzahlen + etc. $\cdots$ + der doppelten Zahl der Produkte zweier verschiedener

Primzahlen + der Zahl der Zahlen vom Typus $e_p e_q^2$ + etc.... ist gleich der Zahl der Gitterpunkte des ebenen Dreiecks, vermindert um die Zahl der Gitterpunkte des räumlichen Vierflächners etc.

Eine etwas einfachere Beziehung ergiebt die Grösse $1 - \frac{1}{N}$; dieselbe ist einmal:

$$= 1 - \prod (1 - e_p) = \sum' e_p - \sum' e_p e_q + \sum' e_p e_q e_r - \cdots,$$

das andere Mal:

$$= 1 - \frac{1}{1 + N - 1} = (N-1) - (N-1)^2 + (N-1)^3 - \cdots$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizientensummen ergiebt sich:

Die Zahl der Primzahlen bis zur Grösse n, vermindert um die Zahl der Produkte zweier verschiedener Primzahlen, vermehrt um die Zahl der Produkte dreier verschiedener Primzahlen etc. ist gleich $n - 1$, vermindert um die Punktzahl des ebenen Dreiecks, vermehrt um die des räumlichen Vierflächners etc.

Den Schluss dieses Abschnittes bilde eine Ableitung des von Riemann für die Funktion $f(n)$ gefundenen analytischen Ausdrucks.

$f(n)$ ist die Summe der Koeffizienten der Einheiten von 1 bis e_n in der komplexen Grösse $\log N(1)$.

Wir können einen geschlossenen Ausdruck für $f(n)$ finden, wenn wir in $\log N(1)$ sämtliche Einheiten e_ν durch Ausdrücke ersetzen, die erstens alle zu einem Ausdruck vereinigt werden können, und die zweitens für jedes $\nu < n$ den Wert 1, für jedes $\nu > n$ den Wert 0 haben. Der Fall $\nu = n$ macht Schwierigkeiten und wir betrachten daher im folgenden n als gebrochene Zahl.

Diese Bedingungen erfüllt das Cauchysche Integral:

$$\frac{e^{ca}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{c\vartheta i} \cdot \frac{d\vartheta}{a + \vartheta i} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } c < 0, \\ 1, \text{ wenn } c > 0, \end{cases}$$

wo $a > 0$ ist (Meyer, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale S. 197).

Durch die Substitutionen $s = a + \vartheta i$, $\frac{n}{\nu} = e^c$ bringen wir das Integral in die Form:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a - i\infty}^{a + i\infty} \left(\frac{n}{\nu}\right)^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \nu > n, \\ 1, \text{ wenn } \nu < n. \end{cases}$$

Jetzt erhält es ν als Argument; setzt man nun in $log\, N(1)$ statt jeder Einheit e_ν das entsprechende Integral, so lassen sich erstens wegen der gleichen Integrationswege alle diese Integrale zu einem einzigen vereinigen, wobei wir hier die Diskontinuitätsbedenken als erledigt ansehen wollen, zweitens haben alle diese Integrale die verlangten Werte 1 respektive 0, so dass ihre Gesamtheit in der That die Koeffizientensumme von $log\, N(1)$ bis zur Grenze n, also die Funktion $f(n)$ ergiebt. Alle diese Integrale unterscheiden sich nur durch den Faktor $\frac{1}{\nu^s}$ der Funktion unter dem Integral, das Gesamtintegral hat also dieselbe Form, nur steht statt $\frac{1}{\nu^s}$ die Summe:

$$\sum \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{p^{2s}} + \sum \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

Dies ist aber wiederum nichts anderes als die Reihenentwickelung des Logarithmus der von Riemann mit ζ bezeichneten Funktion:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \prod \frac{1}{1-p^s},$$

also tritt in dem Gesamtintegral $log\, \zeta(s)$ an Stelle von $\frac{1}{\nu^s}$ und wir erhalten den Riemannschen Ausdruck:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{log\, \zeta(s)}{s} n^s \,.\, ds.$$

Dies ist aber noch nicht die Anzahl der Primzahlen allein bis zur Grenze n, welche Anzahl Riemann mit $F(n)$ bezeichnet, sondern ausserdem die halbe Anzahl der Primzahlquadrate oder die halbe Anzahl der Primzahlen bis zur Grösse $\sqrt{n}$ und so fort, so dass:

$$f(n) = F(n) + \frac{1}{2}F(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

woraus umgekehrt folgt:

$$F(n) = f(n) - \frac{1}{2}f(n^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3}f(n^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}f(n^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6}f(n^{\frac{1}{6}}) \mp \cdots$$

Dieses und ähnliche Umkehrprobleme sollen im folgenden Abschnitte mit Hilfe unserer komplexen Grössen behandelt werden.

XI.

Umkehrung von Reihen.

Möbius („Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen“, Crelles Journ. X. S. 105 und Gesammelte Werke IV. S. 589) leitet aus der Reihe:

$$f(n) = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots,$$

wo fast ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 = 1$ gesetzt wird, die Gleichung ab:

$$n = b_1 f(n) + b_2 f(n^2) + b_3 f(n^3) + \cdots$$

Durch fortgesetzte Induktion findet er das Gesetz für die neuen Koeffizienten; z. B. ist:

$$b_{12} = - a_{12} + 2 a_2 a_6 + 2 a_3 a_4 - 3 a_2 a_2 a_3,$$

wo die Indices alle möglichen Faktorenzerlegungen von 12 darstellen, wobei 1 nicht als Faktor gilt und verschiedene Reihenfolgen der Faktoren als verschiedene Zerlegungen gelten; das Vorzeichen ist + oder —, je nachdem die Zahl der Faktoren gerade oder ungerade ist.

Der Gedanke liegt nahe, einen neuen Beweis dieses Umkehrungsgesetzes mit Hilfe unserer komplexen Grössen zu versuchen, d. h. die Funktion $f(n)$ in gewisser Weise als Produkt darzustellen des Arguments n mit einer gewissen anderen für die Funktion charakteristischen Grösse, die aber n nicht enthalten darf, denn dann ist einfach n gleich $f(n)$ dividiert durch jene Grösse und damit das Umkehrungsproblem gelöst.

Wir betrachten unserm Prinzipe getreu aber wiederum nicht einen einzelnen Wert von $f(n)$ und von n, sondern die Gesamtheit aller in Form einer komplexen Grösse.

Bisher arbeiteten wir nur mit ganzzahligen Werten von n; deren Gesamtheit dargestellt wurde durch die Grösse:

$$N(n) = 1 + 2 e_2 + 3 e_3 + \cdots;$$

jetzt aber muss n als Argument einer Funktion sich stetig ändern können und also alle möglichen gebrochenen, auch negativen und imaginären Werte erhalten. Ich denke mir wieder für jeden solchen Wert von n eine besondere Einheit e_n und drücke durch einen deutschen Buchstaben die Gesamtheit aller möglichen Werte von n aus:

$$\mathfrak{N}(n) = \sum n e_n.$$

Die verschiedenen Einheiten unterliegen natürlich denselben Gesetzen wie bisher: Zwei verschiedene Einheiten sind nicht addierbar; $e_a \,.\, e_b$ ist $= e_{ab}$, insbesondere also auch $e_a{}^b = e_{a^b}$.

Die Gesamtheit aller Werte von

$$f(n) = n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots$$

soll nun als Produkt von $\mathfrak{R}(n)$ mit einer von n unabhängigen Grösse dargestellt werden; dazu bietet sich die folgende aus ganz neuen Einheiten ε gebildete Grösse:

$$N(a) = 1 + a_2 \varepsilon_{\frac{1}{2}} + a_3 \varepsilon_{\frac{1}{3}} + \cdots,$$

so dass

$$\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(n) \,.\, N(a),$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\sum f(n)\, e_n = \sum n e_n \sum a_n \varepsilon_{\frac{1}{n}}.$$

Damit man beim Ausrechnen des Produkts auf der rechten Seite wirklich die linke Seite erhält, muss für das Produkt eines e mit einem ε, welches ja beliebig definiert werden darf, folgendes festgesetzt werden:

$$e_a \varepsilon_b = e_a{}^b = e_{a^b},$$

denn hiernach erhält man beim Ausmultiplizieren als Koeffizienten von e_n die Summe $n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \cdots = f(n)$, also dasselbe wie links.

Sind die ε unter sich, so gelten dieselben Regeln, wie für die e.

Um nun n durch f auszudrücken, brauche ich bloss beide Seiten der Gleichung durch $N(a)$ zu dividieren, oder, wie man hier besser sagt, mit $\frac{1}{N(a)}$ zu multiplizieren.

Ich erhalte $\mathfrak{R}(n) = \mathfrak{R}(f) \cdot \frac{1}{N(a)}$, d. h.:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum n e_n &= \sum f(n) e_n \cdot \frac{1}{1 + a_2 \varepsilon_{\frac{1}{2}} + a_3 \varepsilon_{\frac{1}{3}} + \cdots} \\ &= \sum f(n) e_n \,.\, (1 + b_2 \varepsilon_{\frac{1}{2}} + b_3 \varepsilon_{\frac{1}{3}} + b_4 \varepsilon_{\frac{1}{4}} + \cdots), \end{aligned} \right.$$

wo wir die Koeffizienten nachher bestimmen wollen. Wir erhalten rechts als Koeffizienten von e_n die Summe:

$$f(n) + b_2 f(n^2) + b_3 f(n^3) + \cdots$$

Diese Summe ist $= n$, dem Koeffizienten von e_n auf der linken Seite.

Es sind noch die Werte der b zu bestimmen, um das Umkehrungsproblem von Möbius zu beweisen. Zu dem Zwecke setze ich den Bruch:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1+a_2\varepsilon_{\frac{1}{2}}+a_3\varepsilon_{\frac{1}{3}}+\cdots}=\frac{1}{1-(-a_2\varepsilon_{\frac{1}{2}}-a_3\varepsilon_{\frac{1}{3}}-\cdots} \\ &=\frac{1}{1-K}=1+K+K^2+K^3+\cdots \end{aligned}\right.$$

Nun ist zu beweisen, dass in dieser Entwickelung der Koeffizient irgend einer Einheit, z. B. von $\varepsilon_{\frac{1}{12}}$, den wir ja mit b_{12} bezeichneten, mit dem von Möbius gefundenen Werte übereinstimmt.

Das Glied 1 ergiebt keinen Beitrag zu b_{12}.

Das Glied K ergiebt als Koeffizienten von $\varepsilon_{\frac{1}{12}}$ nur das eine Glied $-a_{12}$.

Das Glied K^2 ergiebt $2a_2a_6+2a_3a_4$.

Das Glied K^3 ergiebt $-3a_2a_2a_3$.

Die folgenden Glieder ergeben $\varepsilon_{\frac{1}{12}}$ gar nicht mehr.

Damit ist das Koeffizientengesetz bewiesen.

Ich will noch bemerken, dass man genau dasselbe beweisen kann, ohne die neuen Einheiten ε einzuführen, man braucht nur statt der Einheit e_n jedesmal $e_{\log n}$ zu benutzen, dann lautet die zu Grunde liegende Gleichung:

$$\sum f(n)e_{\log n}=\sum n\,e_{\log n}\sum a_n e_{\frac{1}{n}}.$$

Der Gedankengang des Beweises ist hierbei genau derselbe und bewegt sich mehr in gewohnten Vorstellungen, scheint mir aber der Natur des Problems weniger angemessen zu sein.

Die speziellen Fälle lassen sich nun auch einfacher ableiten als bei Möbius.

Wenn die Koeffizienten der vorgelegten Funktion $f(n)$ a^{te} Potenzen des Index sind, so ist in der Gleichung

$$\mathfrak{N}(f)=\mathfrak{N}(n)\,.\,N(a)$$

der charakteristische Faktor in Produktform zu bringen, nämlich:

$$N(a)=1+2^a\varepsilon_{\frac{1}{2}}+3^a\varepsilon_{\frac{1}{3}}+\cdots=\prod\frac{1}{1-p^a\varepsilon_{\frac{1}{p}}},$$

da ja für die ε unter sich dieselben Regeln gelten sollen, wie für die e.

Bei der Umkehrung erhält man also:

$$\mathfrak{N}(n) = \mathfrak{N}(f) \cdot \prod \left(1 - p^a e_{\frac{1}{p}}\right),$$

also durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n:

$$n = f(n) - 2^a f(n^2) - 3^a f(n^3) - 5^a f(n^5) + 6^a f(n^6) \mp \cdots,$$

wo nur die durch kein Quadrat teilbaren Zahlen auftreten und das Vorzeichen — bei einer ungeraden Zahl von Primfaktoren zu setzen ist.

Z. B. aus $f(n) = -\log(1-n) = n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} + \cdots$ folgt:

$$n = -\log(1-n) + \frac{1}{2}\log(1-n^2) + \frac{1}{3}\log(1-n^3) \pm \cdots$$

Aus $f(n) = \frac{n}{1-n} = n + n^2 + n^3 + \cdots$ folgt:

$$n = \frac{n}{1-n} - \frac{n^2}{1-n^2} - \frac{n^3}{1-n^3} \mp \cdots$$

Etwas abweichend verhält sich die Funktion

$$f(n) = \log(1+n) = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2} - \cdots$$

wegen der wechselnden Vorzeichen. Doch lässt sich auch hier die charakteristische Grösse N in Produktform bringen; man braucht nur im ersten Faktor ein + statt des — zu setzen.

Es ist nämlich $f(n)$ darstellbar durch:

$$\mathfrak{N}(f) = \mathfrak{N}(n) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\frac{1}{4}} \pm \cdots\right).$$

Der letzte Faktor ist:

$$N = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}}} \cdots,$$

also:

$$\mathfrak{N}(n) = \mathfrak{N}(f)\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_{\frac{1}{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon_{\frac{1}{5}}\right)\cdots,$$

woraus sich für ein spezielles n durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n ergiebt:

$$n = \log(1+n) + \frac{1}{2}\log(1+n^2) - \frac{1}{3}\log(1+n^3) \mp \cdots,$$

wo wieder nur die durch kein Quadrat teilbaren Zahlen auftreten und das Vorzeichen — gesetzt wird, wenn die Anzahl der von zwei verschiedenen Primfaktoren ungerade ist.

Auch die Funktion

$$f(n) = arctg\, n = n - \frac{n^3}{5} + \frac{n^5}{5} \mp \ldots$$

lässt sich ähnlich behandeln; sie wird dargestellt durch:

$$\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(n)\left(1 - \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}} + \frac{1}{5}\varepsilon_{\frac{1}{5}} \mp \cdots\right).$$

Der charakteristische Faktor lässt sich in die Produktform bringen:

$$N = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}\varepsilon_{\frac{1}{5}}} \cdots,$$

wo die Primzahl 2 fehlt, das Vorzeichen + für alle Primzahlen der Form $4n-1$, — für alle Primzahlen der Form $4n+1$ in Anwendung zu bringen ist.

Bei der Umkehrung erhält man:

$$\mathfrak{R}(n) = \mathfrak{R}(f)\left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_{\frac{1}{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon_{\frac{1}{5}}\right)\cdots,$$

also für ein einzelnes n:

$$n = arctg\, n + \frac{1}{3}\, arctg\, n^3 - \frac{1}{5}\, arctg\, n^5 \pm \cdots$$

Hier kommen alle ungeraden durch kein Quadrat teilbaren Zahlen vor und das Vorzeichen ist —, sobald eine ungerade Anzahl von Primfaktoren der Form $4n+1$ im Index enthalten ist.

Endlich kann man auch auf ähnliche Weise das am Schlusse des vorigen Abschnittes vorkommende, schon von Möbius herrührende und von Riemann benutzte Umkehrungstheorem beweisen.

Wenn
$$f(n) = F(n) + \frac{1}{2}F(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

gegeben ist, so ist diese Reihe als Produkt der komplexen Grösse $\mathfrak{R}(F) = \sum F(n)e_n$ darstellbar mit dem charakteristischen Faktor:

$$N = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + \cdots,$$

denn nach der Definition des Produkts $e_n \varepsilon_a = e_n{}^a$ erhält man beim Ausmultiplizieren als Koeffizienten von e_n die Reihe:

$$F(n) + \frac{1}{2}F(n^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(n^{\frac{1}{3}}) + \cdots,$$

also gerade $f(n)$, so dass:

$$\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}(F)\,.\,N.$$

Folglich ist umgekehrt:

$$\mathfrak{R}(F) = \mathfrak{R}(f) \cdot \frac{1}{N}.$$

Da nun N in die Produktform

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p} \varepsilon_p}$$

zu bringen ist, so haben wir:

$$\mathfrak{R}(F) = \mathfrak{R}(f) \prod \left(1 - \frac{1}{p} \varepsilon_p\right),$$

woraus durch Gleichsetzung der Koeffizienten von e_n folgt:

$$F(n) = f(n) - \frac{1}{2} f(n^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} f(n^{\frac{1}{3}}) \mp \cdots,$$

wo nur die durch kein Quadrat teilbaren Zahlen vorkommen und das Vorzeichen — bei einer ungeraden Zahl von Primfaktoren auftritt. Dies ist die Formel am Schlusse des vorigen Abschnittes.

XII.

Schluss.

Mit Hilfe der Eulerschen unendlichen Reihe

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

und ihrer Verallgemeinerung

$$f(1) + f(2) 2^s + f(3) 3^s + \cdots$$

kann man alle in dieser Arbeit behandelten Sätze beweisen und braucht nicht notwendig die von mir aufgestellte komplexe Grösse N, welche ja im Grunde nur eine Modifikation der Eulerschen Reihe darstellt und dabei doch ein Sichhineindenken in ungewohnte mathematische Vorstellungen erfordert. Insbesondere hat mich Herr Hurwitz darauf aufmerksam gemacht, dass die auf Differentiation beruhenden Sätze des Abschnitts IX auch durch Differentiation der verallgemeinerten Eulerschen Reihe:

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{x}{p^s}} = \sum \frac{x^{\alpha_n}}{n^s}$$

gefunden werden können, wo α_n die Zahl der verschiedenen in n enthaltenen Primfaktoren bedeutet.

Ferner hat Herr Hurwitz viele Formeln der ersten Abschnitte aus der Formel

$$\sum_{r=1}^{r=n} \sum_{\delta : r} f(\delta, \delta_1) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \sum_{k=1}^{k=\left(\frac{n}{\lambda}\right)} f(\lambda, k)$$

abgeleitet, durch welche der in dieser Arbeit sich häufig wiederholende Prozess des Aufsuchens entsprechender Koeffizienten auf zwei Seiten der Gleichung ein für allemal erledigt wird. Links bedeutet das innere Summenzeichen, dass die Argumente δ, δ_1 der Funktion f alle Paare komplementärer Teiler von r durchlaufen sollen, rechts bedeutet es, dass k alle Werte von 1 bis zu der grössten in $\frac{n}{\lambda}$ enthaltenen ganzen Zahl durchlaufen soll.

Wenn nun aber auch im einzelnen die Einführung der komplexen Grösse N überflüssig erscheint, so habe ich doch durch einheitliche Darstellung grösserer Gebiete der Zahlentheorie mit Hilfe der Grösse N ihre Zweckmässigkeit erweisen wollen sowohl für das innere klare Erkennen der Beweise als auch für ihre bündige schriftliche Darstellung.

Doch ist diese ohnehin bestreitbare Zweckmässigkeit der komplexen Grösse von untergeordneter Bedeutung und nur eine Folge der theoretischen Berechtigung dieser Grösse, die ich zum Schluss noch einmal darlegen will:

Wenn man eine Gleichung zwischen Eulerschen Reihen der Art $f(1) + f(2)2^s + f(3)3^s \ldots$ hat, so sind wegen der Veränderlichkeit der Grösse s nicht nur die ganzen Summen, sondern je zwei entsprechende Glieder gleich, also hat diese Eulersche Reihe, auf deren wirkliche Summe es überdies nie ankommt, den Charakter einer komplexen Grösse, was durch die Schreibweise

$$N(f) = f(1) + f(2)e_2 + f(3)e_3 + \cdots$$

auch einfacher zum Ausdruck gebracht wird.

Dies ist das Wichtigste, was sich für die Benutzung der komplexen Grösse N sagen lässt.

Lebenslauf.

Ich wurde am 16. Juli 1856 in Dresden geboren, bin evangelisch-lutherischer Konfession und verlebte die ersten 20 Jahre meines Lebens im Hause meiner Eltern, des Kaiserl. Königl. Österr. Majors a. D. von Vieth und seiner Ehefrau Caroline von Vieth geb. Hammanni. Nach dem Besuche des Käufferschen Realinstituts und der Realschule I. Ordnung zu Dresden-Neustadt erlangte ich dort 1873 das Reifezeugnis und studierte dann bis Ostern 1877 am Königlichen Polytechnikum zu Dresden zuerst Ingenieurwissenschaften, dann Mathematik und Physik. Dann studierte ich bis Ostern 1880 an der Universität Leipzig, in welcher Zeit ich auch meiner Militärpflicht genügte und das Staatsexamen für Mathematik und Physik bestand. Dann wurde ich Probelehrer und Hilfslehrer am Nicolaigymnasium zu Leipzig, später Lehrer am Käufferschen Realinstitut zu Dresden, und bin seit Ostern 1885 als Oberlehrer am Königlichen Gymnasium zu Dresden-Neustadt angestellt. 1886 verheiratete ich mich mit Fräulein Bertha Raspe, Tochter des Herrn Dr. phil. Raspe in Dresden.

C. Johann von Vieth.



